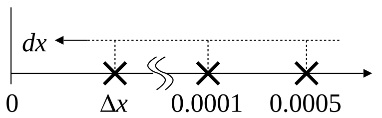
微分公式

吉田勝俊

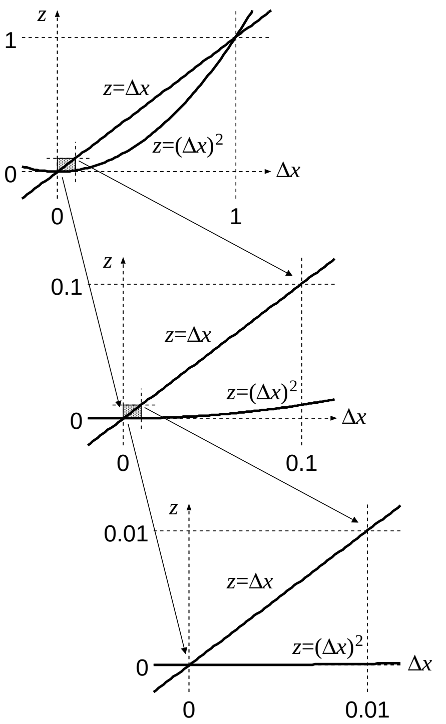
2007 年 12 月 14 日

§1　独立変数の微分

小さくないと文句を言われたら，相手が納得するまで自動的に小さくなる変数を**微分**または**無限小**といい，d を冠して dt, dx, dy などと表わす．自動的には小さくならない通常の微小量は $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ と書いて区別する．



無限小 dx, dy の性質を調べるために，1 次関数 $z = (\Delta x)$ と 2 次間数 $z = (\Delta x)^2$ の原点付近を拡大していく．



1 次関数 $z = (\Delta x)$ のグラフは変化しないが，2 次関数 $z = (\Delta x)^2$ は猛スピードで定値関数 $y = 0$ に近づく．ここで，微小量 Δx を微分 dx に置き換えると，1 次関数はそのまま $z = dx$ だが，2 次関数は定値関数 $z = (dx)^2 = 0$ と見なせる．なぜなら，その程度の dx では定値関数に見えないと言われたら，そう見えるまでどんどん小さくできる約束である．同様にして，曲面 $z = (\Delta x)(\Delta y)$ は猛スピードで平面 $z = 0$ に近づくから，$dxdy = 0$ である．

以上まとめると，$dx, dy \neq 0$ を基準長さとする無限小世界においては，次の算法が成立する．

- $(dx)^2 = (dy)^2 = dxdy = 0$.

§2　従属変数の微分

2.1　1 変数関数の微分　1 変数関数 $f(x)$ を考える．独立変数 x の微分 dx をとり，幅 dx によって定まる高さ，

$$df := f(x + dx) - f(x)$$

を従属変数 f の微分という[*1)]．こうして，幅 dx，高さ df の小さな窓が作られる．

ここで幅 dx を小さくしながら，縮小する窓の中を観察する．窓の中の $f(x)$ のグラフが窓の対角線に漸近するとき，$f(x)$ は x で**微分可能**または**滑らか**であるという．対角線に見えないと文句をいわれたら自動変数 dx をさらに小さくする．そうできる約束である．こうして窓を縮小していけば，任意の精度で曲線を直線近似できる．

窓の左下 $(x, f(x))$ を改めて原点と見なせば，対角線はよく知られた “$y = ax$” の形式で，

$$df = Kdx \quad (K \in \mathbb{R} \text{ は定数})$$

と書ける．係数 K を，$f(x)$ の x に関する**微分係数**，または $f(x)$ の**傾き**という．現代的には，K を $f'(x)$ もしくは $\frac{df}{dx}$ と表記し，その関数形は，極限操作：

$$K = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

によって見付けられることが知られている．

以上まとめると，微分可能な 1 変数関数 $f(x)$ について，次の算法が成立する．

- $df := f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$.

$f(x)$ を右辺に移項すると，

- $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$.

と書けるが，これは，f が微分可能なときは，$f(x + dx)$ の dx は f の外に出せることを意味している．

2.2　多変数関数の微分　同様にして，2 変数関数 $f(x, y)$ の微分を次のように定義する．

$$df := f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

*1) := は定義を意味する等号.

これを従属変数 f の**全微分**という．

これに対して，自分以外の独立変数を定数と見た

$$\begin{aligned} df_{(x)} &:= f(x+dx,y)-f(x,y),\\ df_{(y)} &:= f(x,y+dy)-f(x,y) \end{aligned}$$

を**偏微分**という．それぞれは 1 変数関数の微分と同じだから，窓の対角線の議論によって，

$$df_{(x)} = K_{(x)}dx, \quad df_{(y)} = K_{(y)}dy$$

と書けるとき，z は**偏微分可能**であるという．係数 $K_{(x)}$, $K_{(y)}$ を，それぞれ x, y に関する**偏微分係数**という．現代的にはこれらを，

$$K_{(x)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad K_{(y)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

と書く．全微分 df が，偏微分 $df_{(x)}, df_{(y)}$ の和で，

$$\begin{aligned} df &= df_{(x)} + df_{(y)} = K_{(x)}dx + K_{(y)}dy\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \end{aligned}$$

と書けるとき，$f(x,y)$ は**全微分可能**であるという．このとき次の算法が成立する．

- $df := f(x+dx,y+dy)-f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

これを**全微分の公式**という．

以上の議論は，n 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の場合に一般化できる．

■偏微分係数　x_i 以外を定数とみて f を x_i で微分したものを，第 i 変数に関する f の**偏微分係数**と呼び，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ もしくはコンパクトに $\partial_i f$ とも書く．

■全微分の公式　従属変数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の全微分を

$$\begin{aligned} df := &f(x_1+dx_1, x_2+dx_2,\cdots,x_n+dx_n)\\ &- f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}$$

と定めるとき，次の算法が成立する．

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

§3　微分公式

全微分の公式から次が導ける．$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ と書いた．

(1) $\dfrac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \dot{x}y + x\dot{y}$.（積）

(2) $\dfrac{d}{dt}f(x(t)) = \dfrac{df}{dx}\dot{x}$.（合成関数）

(3) $\dfrac{d}{dt}f(x(t),y(t),t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$.

試しに (3) を導いてみよう．全微分の公式より，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx(t) + \frac{\partial f}{\partial y}dy(t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

となるが，$x(t), y(t)$ は従属変数なので，さらに $dx(t) = \dot{x}dt$, $dy(t) = \dot{y}dt$ までたどれる．dt は独立変数の微分なので，これ以上は微分できない．以上をあわせて，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

を得るが，これを dt で割れば与式を得る[*2)]．

§4　ヤコビ行列

n 変数の実数値関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の書き方だが，

$$f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

という表記を導入しよう (T は転置)．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ とみて t で微分すると，全微分の公式を dt で割って，

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

となる．短縮表記，

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{x}} f &:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T,\\ \dot{\boldsymbol{x}} &:= (\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)^T \end{aligned}$$

を導入すると，$\dot{f}$ は，$\partial_{\boldsymbol{x}} f$ と $\boldsymbol{x}$ の内積で書ける．

- $\dfrac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{x}} f \cdot \dot{\boldsymbol{x}}$

ちなみに，$\partial_{\boldsymbol{x}}$ をナブラと呼び ∇ と書くことがある．

一般に，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への変換則は，n 個の n 変数関数によって，

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad \big(\equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\big)$$

と書ける．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ とみて t で微分すると，

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(\boldsymbol{x})\\ \dot{f}_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ \dot{f}_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\partial_1 f_1)\dot{x}_1 + (\partial_2 f_1)\dot{x}_2 + \cdots + (\partial_n f_1)\dot{x}_n\\ (\partial_1 f_2)\dot{x}_1 + (\partial_2 f_2)\dot{x}_2 + \cdots + (\partial_n f_2)\dot{x}_n\\ \vdots\\ (\partial_1 f_n)\dot{x}_1 + (\partial_2 f_n)\dot{x}_2 + \cdots + (\partial_n f_n)\dot{x}_n \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1\\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \cdots & \partial_n f_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \cdots & \partial_n f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \equiv [D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]\dot{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

行列 $[D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]$ を，**ヤコビ行列**という．まとめると，

- $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]\dot{\boldsymbol{x}}$

  ほぼ同様の計算によって，

- $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = [D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}]\dot{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}$

も導ける．$\partial\boldsymbol{F}/\partial t$ は $\partial f_i/\partial t$ を成分とするベクトルである．

---

*2) 一般に全微分 $\frac{df}{dt} \neq$ 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial t}$ であることの 1 つの具体例である．