線形空間入門

吉田勝俊

平成 16 年 11 月 17 日 初版
平成 30 年 6 月 29 日 改訂第 6 版

まえがき

研究に必要な数学リテラシーを，線形空間論を中心に抜粋してみた．物理空間は定規を備えていないから，物理ベクトルは数ベクトルではない．数ベクトルでなくても線形空間論の世界では明解に計算できる．

特に今回の更新では，線形空間以前の，集合と写像の一般論を増強してみた．というのも，研究上，(私のような) 凡人が知的制御器の動作を思い描くには，集合論の表記短縮効果が必要不可欠というか，それ無しには脳味噌がバグるんじゃないかと思えてきた今日この頃なのである．

平成 27 年 5 月 27 日　吉田勝俊

目 次

1	**公理的方法**	3
2	**集合**	9
3	**写像**	13
4	**線形演算**	17
5	**線形空間**	22
6	**$\sum$ の算法**	25
7	**部分空間**	28
8	**基底と座標**	33
9	**基底の特徴付け**	35
10	**線形写像**	38
11	**線形同型**	42
12	**行列表示**	45
13	**疑似逆行列**	49
14	**内積空間**	52
15	**符号付き面積**	57
16	**行列式**	60

1

公理的方法

本書の大前提として，何もない，何も信じられない世界を想定する．

1.1　定義と定理

その何もない世界に構造を作るために「これだけは無条件に信じる」という取り決めをおく．このような取り決めを**定義** (definition)，**公理** (axiom)，**仮定** (assumption) などと呼び，本書では□印を付けて表す．次に，このような□から「導かれるもの」を**定理** (theorem)，**公式** (formula)，**命題** (proposition)，**補題** (lemma，補助定理) などと呼び，■印を付けて表す．立場的に「□」と「■」は全くの別物である．

本書は，既設の「□」から未知の「■」を読者自身が導くスタイルで構成してある．極めて初等的な内容なので，それは可能である．実際,「□」を第 0 世代 (親) だとすると，本書に出てくる「■」のほとんどは第 1 世代 (子) であり，第 2 世代 (孫) にいたるケースは稀である．ようするに本書には,「□」を仮定すれば直ちに「■」になってしまうような「■」しか出てこない．(図 1.1 参照)

何もない世界
⇓ 設置
第 0 世代： □定義，□公理，□仮定
⇓ 導出
第 1 世代： ■定理，■公式，■命題，■補題
⇓ 導出
第 2 世代： ■定理，■公式，■命題，■補題
⋮

図 1.1　定義と定理

ただし，現役の学生諸君は学習速度が速すぎるので注意が必要である．著者の体感でいうと，適正速度の 5〜10 倍速をキープしようとして，理解できないと嘆く．例えば，本章の理解に 2ヶ月かかったら，遅過ぎると感じる読者が大半であろう．実際にそう思う諸君はぜひ図 1.2 を見てほしい．実線が一般的な学習法で，点線が本書の推

奨する学習法である．我々が避けるべき実線の特徴として，専門書でいうと 2 章か 3 章あたりで理解が完全にストップし，その後何年かけても全く理解できない．そんなことが起こる．これに対して，我々が目指すべき点線は，全ての「■」を「□」から自力で導いていったときのカーブで，少なくとも本書のような初等レベルの内容であれば，理解の飽和は起らず，逆に理解は加速していくはずだ．

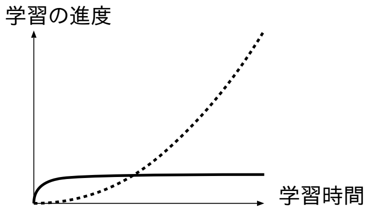


図 1.2　高校までの学習法 (実線) と本書が推奨する学習法 (点線)

このような本書の進め方に，最初はとまどうかも知れないが，理解に苦しんだときのコツは，無理して「□」や「■」の具体例を思い浮かべないことである．たとえ，それまでの人生に具体例が見付からなくても「この取り決めに対しては，これがあてはまる」ということが理性的に納得できていればよい．また，これまでの読者の学習体験とは異なり，ある「■」を証明するときに「答え合わせ」などという権威の御墨付は必要ない．もし必要なら，それは証明に失敗したことを意味する．本書の「■」の多くは第 1 世代だから，証明に成功すると，誰がどう見ても完全に証明できてる，といった風情の証明になる．そのために必要な「□」は全て本書のなかにある．

以上に述べたような，何もない世界に「□」を設置し，そこから「■」を導くことで世界を広げていくやり方を公理的方法 (axiomatic method) というが，具体的には，

(1) 何らかのルールを定義する．(□定義，□公理を設置する)
(2) そのルールから何かを導く．(■定理，■公式，$\cdots$ を導く)

という手順を踏む．この手順を連鎖させて，何もないところに世界を作り上げていく．

1.2　論理

そのための基本テクニックとして**命題論理**を学ぼう．この手法自体が上の手順で作られている．まず，何もない世界を想定する．そこに次のルールを置く．

□定義 1.1 (命題)　真か偽かが定まる文章を**命題** (proposition) という [1]．

- 命題 P が真のとき，P は 1 という**真理値** (truth value) をもつと定める．
- 命題 P が偽のとき，P は 0 という真理値をもつと定める．

---

[1] これに対して，確率論における真理値，すなわち確率は 0 から 1 までの連続な値をとる．

こうして，何もない世界に「□」を 1 つ設置したが，これではさすがに世界が狭すぎるので，2 つ以上の命題を組み合わせるルールを追加してみよう．

□公理 1.2 (論理記号)　命題 P，Q から別の命題を作るルールを 4 つ定める．

(1) 論理和 (または)

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(2) 論理積 (かつ)

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(3) 否定 (でない)

P	$\neg P$
1	0
0	1

(4) 条件命題 (ならば)

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

このような，真理値を並べた表を**真理表**という．

あくまで「□」として定めるのだから，無条件にそう定めるのであって，日常の論理をいくら詳細に吟味したところで，この 4 つのルールは出てこない．ただし歴史的な事実として，こう定めておけば，数学が自然現象と矛盾しない．

とはいえ，特に (4) に強烈な違和感を憶える読者が多いと思うので，(4) がないと表現できない日常の論理を挙げておこう．例えば，次の掲示は本当か嘘か？

$$\boxed{\text{雨の日} \to \text{休講とする}}$$

雨の日 ($P=1$) に，休講したら ($Q=1$) 掲示は本当 ($P \to Q=1$) だが，授業したら ($Q=0$) 掲示は嘘 ($P \to Q=0$) である．ところが，雨以外の日 ($P=0$) に休講しても ($Q=1$)，授業しても ($Q=0$)，掲示に嘘はない ($P \to Q=1$)．この状況は (1)〜(3) では表せないから，それ用の (4) が用意されているのである．

いや違う，$P \to Q$ の論理は 1,0,0,1 であるべきだとさらに粘りたい諸君は，次の記号を定義して使って下さい．

□定義 1.3 (双条件命題)　$P \leftrightarrow Q \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ と定める．$P \leftrightarrow Q$ を双条件命題という．

こうして，何もなかった世界に，3 つの「□」(定義 1.1，公理 1.2，定義 1.3) が設置されたが，この世界の最初の子供として，次の「■」を導いてみよう．

■定理 1.1 (双条件命題)　双条件命題 $P \leftrightarrow Q$ について，次の真理表が成立する．

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

公理的方法において,「■」が成立することを主張するには，根拠を示さなければならない．根拠とは「□」のことである [2]．本書においても，何かを行うときには，どの「□」で許された操作なのかを明示することにする．読者も遵守して頂きたい．

さてここで，定理 1.1 が成立する世界には，現時点では定義 1.1，公理 1.2，定義 1.3 しかないから，それらが許す操作のみで，定理 1.1 の成立を示さなければならない．

▶ **証明**　定義 1.3 より $P \leftrightarrow Q$ とは $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ のことである．これは公理 1.2(4) と (2) の組合せだから，次のように示される．

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
		$\because$ 公理 1.2(4)		$\because$ 公理 1.2(2)	$\because$ 定義 1.3

以上が定理 1.1 の証明だが，見てのごとく，公理 1.2，定義 1.3 を根拠に定理 1.1 が成立している．これだけ一目瞭然なら，教師の御墨付は必要なかろう．これが本当の証明である．読者はこの方式で，本書の全ての「■」を理解していく必要がある．

ところで，双条件命題 $P \leftrightarrow Q$ が真のときに限り，P, Q の真理値が一致する．これを，P, Q は互いに同値であるといい，$P \equiv Q$ と書く．これを一般化して，

□定義 1.4 (同値記号)　真理値もしくは真理表が一致する命題を，互いに**同値** (equivalent) もしくは**等価**であるといい，$P \equiv Q$ もしくは $P \Longleftrightarrow Q$ と書く．

以上の真理表を比較する手法によれば，その他の法則も簡単に示せる．

■定理 1.2 (論理の算法)　公理 (1)〜(4) を前提に次の公式が成立する．

(a)　$P \vee P \equiv P$,　$P \wedge P \equiv P$　(累同則)
(b)　$P \vee Q \equiv Q \vee P$,　$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$　(交換則)
(c)　$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
(c')　$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$　(結合則)
(d)　$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
(d')　$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$　(分配則)
(e)　$\neg\neg P \equiv P$　(二重否定)
(f)　$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$,　$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$　(ド・モルガンの法則)

Exercise 1.1　例えば (d) を示せ．(両辺の真理表を作り比較する)

条件命題「$P \to Q$」は，P が偽のとき常に真になってしまうので,「$P \to Q$ ただし P は真」と書きたくなることがある．毎回それでは面倒なので，

□定義 1.5 (含意)　P が真ならば必ず Q も真になることを，P は Q を**含意**するといい，$P \Longrightarrow Q$ と書く．含意の P を仮定や前提，Q を結論や帰結という．

---

[2] その他にも証明済みの「■」が使えるが，混乱を避けるため，しばらく強調しない．

1.3　限定記号

その他必要な技能として，$\forall$ 記号や $\exists$ 記号を使えるようにしておこう．一般に，真理値が変数 x に依存する命題 P を**命題関数**と呼び $P(x)$ などと書く．例えば，

- $P(x) :=$“x は光合成する” について，P(焼き鳥) は偽，P(生レタス) は真.

このように，命題関数 $P(x)$ の真理値を確定させるには，変数 x に具体的な定数を代入すればよいが，もう 1 つの方法として，限定記号を用いる方法がある.

□**定義 1.6 (限定記号)**　$P(x)$ を命題関数とする.

$\forall x\,; P(x) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての (任意の)x について $P(x)$ は真である.

$\exists x : P(x) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P(x)$ を真にするような x が (少くとも 1 つ) 存在する (選べる).

ここで用いた $\forall$ を**全称記号**，$\exists$ を**存在記号**という．これらを総称して限定記号という.

►► **(s.t.)**　$\exists x : P(x)$ を，$\exists x$ s.t. $P(x)$ とも書く． s.t. は such that の短縮表記である．A s.t. B で「B を満足する A」という意味になる.

Exercise 1.2　x が実数であることを $x \in \mathbb{R}$ と書く．次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $\exists x \in \mathbb{R} : \sin x = 0$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}\,; \sin x = 0$.

限定記号をつける順番によって，命題の意味が大きく変化するので注意が必要である．例えば，命題関数 $P(x, y) :=$ “x likes y” について考えよう．x があるクラス A の生徒であることを $x \in A$ と書く．このとき，命題

(1) $\forall x \in A; \exists y \in A : P(x, y)$

は,「任意の $x \in A$ について，“x likes y” であるような生徒 $y \in A$ が存在する」と読み下せる．日常語でいうと「どんな生徒にも好きな人がいた」となる.

Exercise 1.3　次の命題を読み下し，その意味を解釈せよ.

(2) $\exists x \in A; \forall y \in A : P(x, y)$.

(3) $\forall y \in A; \exists x \in A : P(x, y)$.（受動態にすると理解しやすい)

(4) $\exists y \in A; \forall x \in A : P(x, y)$.（受動態にすると理解しやすい)

限定記号つきの否定命題も作れるようにしておこう．これが作れないと背理法が使えない．さて「このクラスには男子しかいない」が嘘になるためには，クラスの全員が女子である必要はない．少なくとも 1 人が女子であればよい．ゆえに

$$\neg(\forall x \in A; P(x)) \quad\equiv\quad \exists x \in A : \neg\bigl(P(x)\bigr)$$

$$\neg(\exists x \in A; P(x)) \quad\equiv\quad \forall x \in A; \neg\bigl(P(x)\bigr)$$

が成立する．限定記号が複数存在するときも，同様の考察によって否定命題を作ることができるが，結果だけ述べると，(1) 機械的に $\forall$ と $\exists$ を反転させ，(2) 命題 $P(x)$ を否定する．例えば，

$$\neg(\forall x \in A; \exists y \in A : P(x,y)) \quad \equiv \quad \exists x \in A : \forall y \in A; \neg\bigl(P(x,y)\bigr).$$

もう 1 つ，気付きにくいノウハウとして「暗黙の $\forall x$」がある．次の両辺は同値である．

$$x \in A \implies P(x) \quad \equiv \quad \forall x \in A; P(x) \tag{1.1}$$

$\equiv$ の左辺は，定義 1.5 p6 (含意) より「$x \in A$ が真ならば必ず $P(x)$ も真である」ことを表す．ここで，命題「$x \in A$」が真となるのは，A に含まれる全ての x についてである．したがって，左辺は，全ての $x \in A$ について $P(x)$ は真と言っているのと同じである．右辺の主張も同じなので，右辺と左辺は互いに同値である．

Exercise 1.4　命題「$v, w \in W \implies v + w = w + v$」を書き換えよ．

2

集合

例えば物体の巨視的な変位を x のような変数で表すと，様々な計算が実行できる．では，物体を多数の粒子の塊と見た場合はどうだろう．粒子の集合を変数 X で表すのはいいとして，X をどう計算するかが問題になる．本章では，たとえ粒子数が無限個であっても通用する，集合の計算法を学ぶ.

粒子数が数個の場合は,

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad B = \{x_3, x_4, x_5\} \tag{2.1}$$

のように集合の要素を列挙できる．集合の交わり $A \cap B$ や結び $A \cup B$ なども，高校数学の範囲で直感的に,

$$A \cap B = \{x_3\} \text{ (要素が 1 つの集合)}, \quad A \cup B = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \tag{2.2}$$

だと分かる.

これに対して，ここで論じたいのは，粒子数が無限個の場合である．こうなると，全ての要素を 1 つずつ確認することはできない．そこで，要素を直接見ないで済ませる集合論が発明された．これを現代集合論という.

現代集合論では，集合の操作を全て，前章の命題論理に帰着させる．そのための出発点として，まず次の公理が設定される.

□**公理 2.1 (集合)** 属すか否かが明確に定まる要素の集りを**集合** (set) という.

- x が集合 X の要素であることを，$x \in X$ と書く．要素を元 (げん) ともいう.
- x が集合 X の要素でないことを，$x \notin X$ と書く．すなわち，$x \notin X \equiv \neg(x \in X)$.

この公理 (すなわち定義) により,「$x \in X$」は真偽の確定する命題になる．したがって X が如何なる集合であろうとも，$x \in X$ と書けば論理の算法 (定理 1.2 など) が使える．この方向で，もうすこしだけ世界を広げよう.

□**定義 2.2 (部分集合)** X が Y の部分集合 (subset) であるとは，$x \in X \Rightarrow x \in Y$ であることをいう．$X \subset Y$ と書く.

□定義 2.3 (集合の相等)　X と Y が集合として等しいとは，$X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ であることをいう．$X = Y$ と書く．

ここに定義された集合の $=$ は，数の等号 $1+1=2$ とは全くの別物である．したがって，X, Y を集合として $X = Y$ と書かれたら，その意味するところは定義 2.3 である．これを数の $1+1=2$ と混同すると，何年かけても意味はとれない．

Example 2.1　定義 2.2 を用いて，相等 $X = Y$ を $x \in X$ の形式で書き下せ．

▶ **解答例**　$X = Y \overset{\text{定義}}{\iff} (X \subset Y) \wedge (X \supset Y)$　□定義 2.3 集合の相等

$\equiv (x \in X \;\Rightarrow\; x \in Y) \wedge (x \in X \;\Leftarrow\; x \in Y)$　□定義 2.2 部分集合

$\equiv (x \in X \iff x \in Y)$　□定義 1.3 p5 双条件命題

□定義 2.4 (集合演算)　X, Y を集合とする．

(1) 集合積 $\cap$：$x \in (X \cap Y) \overset{\text{定義}}{\iff} (x \in X$ and $x \in Y)$.
(2) 集合和 $\cup$：$x \in (X \cup Y) \overset{\text{定義}}{\iff} (x \in Y$ or $x \in Y)$.
(3) 集合差 $\setminus$：$x \in (X \setminus Y) \overset{\text{定義}}{\iff} (x \in X$ and $x \notin Y)$.
(3') 補集合 ^{c}：特に全体集合 Ω の存在を仮定するとき，部分集合 $X \subset \Omega$ に対して，

$$X^c := \Omega \setminus X$$

を X の補集合と呼ぶ．

Example 2.2　X, Y, Z を集合とする．定理 1.2 p6 (d) を前提に，$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ を示せ．

▶ **解答例**　集合の相等 $=$ を示すのだから，$x \in \cdots \Rightarrow x \in \cdots$ かつ $x \in \cdots \Leftarrow x \in \cdots$ を示す以外にない．すなわち，

$x \in X \cap (Y \cup Z) \iff x \in X \wedge x \in (Y \cup Z)$　□定義 2.4(1) 集合積

$\iff \underbrace{x \in X}_{P} \wedge (\underbrace{x \in Y}_{Q} \vee \underbrace{x \in Z}_{R})$　□定義 2.4(2) 集合和

$\iff (x \in X \wedge x \in Y) \vee (x \in X \wedge x \in Z)$　■定理 1.2(d)

$\iff x \in (X \cap Y) \vee x \in (X \cap Z)$　□定義 2.4(1) 集合積

$\iff x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$　□定義 2.4(2) 集合和

$\therefore\quad x \in X \cap (Y \cup Z) \iff x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$\overset{\text{定義}}{\iff} X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$　□定義 2.3 p10

Exercise 2.1　同じく (d') を根拠に，$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ を示せ．

この他にも，まるで命題論理の生き写しのような形で，集合演算の各種公式が成立していく．例えば定理 1.2 p6 の集合演算バージョンを作ることができる．

■定理 2.1 (集合の算法)　公理 1.2 と公理 2.1 を前提に次の公式が成立する．X, Y, Z を集合とする．

(a)	$X \cup X = X, \quad X \cap X = X$	(累同則)
(b)	$X \cup Y = Y \cup X$，$X \cap Y = Y \cap X$	(交換則)
(c)	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	
(c')	$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$	(結合則)
(d)	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	
(d')	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	(分配則)
(e)	$\big(X^c\big)^c = X$	(二重否定)
(f)	$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$，$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$	(ド・モルガンの法則)

形式的には，定理 1.2 の「$\equiv, \vee, \wedge, \neg(\cdot)$」を「$=, \cup, \cap, (\cdot)^c$」で置き換えたものになる．

以上，集合の要素を直接見ることなく，集合演算の各種法則が証明できた．このように，公理 2.1 p9 に基づく集合論によれば，

- $\mathbb{R}$ ⋯ 実数の全体集合.
- $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数の全体集合.
- $\mathbb{K}$ ⋯ 四則演算できる数の全体集合.
- $\mathrm{M}_{m \times n}$ ⋯ $m \times n$ 行列の全体集合.
- $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ ⋯ 実数値関数の全体集合.

など，要素を列挙できない巨大な集合を扱うことができる．例えば，$m \times n$ 行列を全て列挙することはできないが，$m \times n$ 行列かどうかは判別できるので，それらの全体集合 $\mathrm{M}_{m \times n}$ を定義することができる．このとき $A \in \mathrm{M}_{m \times n}$ は命題となり，集合演算が使えることは言うまでもない．

そこで今後は，例えば「x は実数」などと書くべきところを「$x \in \mathbb{R}$」と書くことにする．実数かどうかを判別することと，その全体集合を考えることは，公理 2.1 において同値だからである．その心は「すぐに集合演算が使える」である．

具体的な集合の表示方法としては，次の 2 つの記法がよく使われる．

- $A := \{a, b, c\}$，$X := \{x_1, x_2, \cdots\}$ のように中括弧で列挙 (したふりを) する．
- $X := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \,\}$ のように，$\{$ 全体集合 $|$ 制約条件 $\}$ の順に宣言する．

ここで，見落しがちな公理 2.1 の帰結として，

(1) 要素を並べる順番は問わない．例えば $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$.
(2) 重複する要素を除いても同じ集合．例えば $\{a, b, c, b\} = \{b, a, c\}$.

である．例えば $A = \{a, b, c, b\}$，$B = \{b, a, c\}$ とすると，全ての $x \in A$ について $x \in A \implies x \in B$ は真である．同様に $x \in B \implies x \in A$ も真だから $A = B$ がいえる．したがって重複する要素は初めから書かないのがふつうである．

これに対して，要素数と順序に意味があって $\{a, b, c, b\}$ を 4 成分の集りと見なしたいときは「4 個組」などと称して，集合とは区別する．一般に，

□**定義 2.5 (直積)**　順序に意味がある対 (x, y) を**順序対** (ordered pair) という．順序対の全体集合

$$X \times Y := \{\,(x, y) \mid x \in X, y \in Y\,\}$$

を X と Y の**直積** (cartesian product) という．

同様にして，3 成分ならば，

$$X \times Y \times Z := \{\,(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\,\}$$

とすればよい．$4, 5, \cdots n$ 成分も同じ要領である．

よく未定義で使われるものに $\mathbb{R}$ の直積がある．

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ \text{個}} = \{\,(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\,\}$$

例えば $(e, \pi, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$ である．同じく $\mathbb{Z}^n$ なら整数の n 個組の全体集合である．

Exercise 2.2　直積集合 $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$ の要素を全て列挙せよ．

最後に復習がてら，具体的な集合を記述してみよう．例えば，平面上に描いた図形は，平面の部分集合として数式表現できる．平面を $\mathbb{R}^2$ とする．例えば，その一部を指定することで作った部分集合，

$$D := \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,\} \tag{2.3}$$

は，単位円盤を表す．(D と D^c で色分けすれば絵になる)

Exercise 2.3　同様に，$\mathbb{R}^2$ 上の単位円周 (∂D と書く) を集合として記述せよ．

3

写像

粒子の集合 X の運動を論じようとすると，時間経過に伴う粒子群の変換 $Y = f(X)$ を扱う必要がでてくる．本章では，現代集合論の作法にのっとり，無限集合にもそのまま通用する変換 $Y = f(X)$ の算法を導入する．

2 つの集合 X, Y を考えたとき，要素間の次のような対応関係を写像という．

□定義 3.1 (写像と関数)　$x \in X$ の相方 $y \in Y$ を**一意に**定める規則 f を**写像**といい，

$$f : X \to Y \quad \text{または} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

と書く．X を定義域，Y を値域という．$x \in X$ に対する $y \in Y$ を $f(x)$ と書く．特に，自分自身への写像 $(X = Y)$ を**変換**という．また，$y \in Y$ が数であるような写像を**関数**という．なお，同じことを要素で書くときは，記号 $\to$ を $\mapsto$ に変えて，

$$f : x \mapsto y \quad \text{または} \quad x \overset{f}{\mapsto} y$$

と表記する．

「一意に」とは，一通りにという意味である．したがって，2 次関数 $y = f(x) = x^2$ は写像だが，$y = g(x) = \pm\sqrt{x}$ は値が 2 通りなので写像ではない．したがって，数学用語的には，$f(x)$ は関数だが，$g(x)$ は関数とは呼ばない．ただし，物理や工学では $g(x)$ を多価関数と呼ぶ場合がある．

□定義 3.2 (恒等写像)　自分自身への写像 $I : X \to X$ のなかで，

$$I(x) = x \quad \text{for } \forall x \in X \tag{3.1}$$

を満すものを**恒等写像**といい，しばしば $I = \mathrm{id}_X$ と書く．

Example 3.1　与えられた集合 X に対して，id_X は一意に存在することを示せ．

▶▶ **(一意性の証明)**　異なるものを 2 つとって，結局一致することを示す．

▶ **解答例**　恒等写像を 2 つ $I : X \to X$, $I' : X \to X$ とる．定義より，それぞれ

$$I(x) = x \quad \text{for } \forall x \in X, \quad I'(x) = x \quad \text{for } \forall x \in X$$

となる．x で等値すると，

$$I(x) = x = I'(x) \quad \text{for } \forall x \in X$$

となり，X の全域で I と I' の値は等しい．ゆえに，I と I' は同じ写像である．//

□**定義 3.3 (像と原像)**　$f : X \to Y$ を写像とする．定義域の部分集合 $A \subset X$ から定まる値域の部分集合，

$$f(A) := \{\, f(x) \in Y \mid x \in A \,\} \quad \subset Y \tag{3.2}$$

を，f による A の**像**という．値域の部分集合 $B \subset Y$ から定まる定義域の部分集合，

$$f^{-1}(B) := \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\} \quad \subset X \tag{3.3}$$

を，f による B の**原像**または**逆像**という．

例えば，$A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，$f(A) = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$ となる．また，$g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 2$ に対して，$g^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}$, $g^{-1}(\{2\}) = \{3\}$ となる．

▶▶ **(原像と逆写像？)**　f^{-1} は後述する逆写像と同じ記号だが，原像は $f^{-1}($ 集合 $)$，逆写像は $f^{-1}($ 点 $)$ なので，見た目で区別できる．

■**定理 3.1 (原像の算法)**　写像 $f : X \to Y$ による $B, B_1, B_2 \subset Y$ の原像は，Y 上の集合演算を保存する．

(1) $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(4) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

Example 3.2　(1) を示せ．

▶▶ **(同値変形)**　$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$ を用いる．
　証明は原像の定義より明らか．すなわち，任意の $f(x) \in B$ をとったとき，そうなる x を集めたのが $f^{-1}(B)$ なのだから，$x \in f^{-1}(B)$ は明らか．同様に，任意の $x \in f^{-1}(B)$ をとったとき，その値 $f(x)$ は当然 B に含まれる．

▶ **解答例**　(1) の前提 $B_1 \subset B_2$ は，部分集合の定義より，

$$y \in B_1 \implies y \in B_2$$

を意味する．ここで，任意の $x \in f^{-1}(B_1)$ を取る．このとき，

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\iff f(x) \in B_1 \quad \text{同値変形} \\ &\implies f(x) \in B_2 \quad \text{冒頭の前提 } B_1 \subset B_2 \\ &\implies x \in f^{-1}(B_2) \quad \text{同値変形} \end{aligned}$$

より $x \in f^{-1}(B_1) \implies x \in f^{-1}(B_2)$ が示される．ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ //

Example 3.3　(2) を示せ.

▶ **解答例**　これは同値変形で示せる.

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \quad \text{同値変形}\\
&\iff f(x) \in B_1 \ \text{or}\ f(x) \in B_2 \quad \text{和集合の定義}\\
&\iff x \in f^{-1}(B_1) \ \text{or}\ x \in f^{-1}(B_2) \quad \text{同値変形}\\
&\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{和集合の定義}
\end{aligned}
$$

集合の相等より，$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ となる.

Exercise 3.1　同様に，(3) と (4) を示せ.

像についても定理 3.1 と類似の算法が成立するが，相等が部分集合に変るなど，違いがあるので注意されたい．証明は読者の研究課題とする [1)].

■定理 3.2 (像の算法)　写像 $f : X \to Y$ による $A, A_1, A_2 \subset X$ の像は次を満す.

(1) $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(4) $f(A^c) \supset f(X) \setminus f(A)$.

もう１つ，像と原像を組み合わた次の定理も，応用上有益な示唆を与える.

■定理 3.3　以下，相等は必ずしも成立しない.

(1) $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.
(2) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

Exercise 3.2　$f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$ となる例として，$A := \{1, 2\}$, $B := \{p, q\}$, $f(1) = f(2) := p$ の場合を確かめよ.

最後に，研究室向けの具体例を挙げておこう．n 次元の非線形力学系,

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.4}
$$

を考える．その解を，$\boldsymbol{x}(t) = \phi_t(\boldsymbol{x}_0)$ と表記して，初期値 $\boldsymbol{x}_0$ と経過時間 t を明示する．変換 $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を推移作用素と呼ぶ．この系が m 個の安定平衡点 $\boldsymbol{\omega}_i$ を有すると仮定すると，それぞれの吸引域 $\varPhi_i$ は,

$$
\varPhi_i := \{\, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \to \infty} \phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\omega}_i \,\} \tag{3.5}
$$

と定義される．ここで，$\phi_\infty(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{t\to\infty} \phi_t(\boldsymbol{x}_0)$ と表記すると，条件式は $\phi_\infty(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\omega}_i$ となるが，これは $\phi_\infty(\boldsymbol{x}_0) \in \{\boldsymbol{\omega}_i\}$ (1 点からなる集合) と等価なので，結局,

---

1) 松坂 [1] など，集合論の教科書には大概証明が書いてある.

$$\varPhi_i = \{\, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \phi_\infty(\boldsymbol{x}_0) \in \{\boldsymbol{\omega}_i\} \,\} \quad = \phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_i\}\Big) \tag{3.6}$$

と書ける．すなわち，平衡点 $\boldsymbol{\omega}_i$ の吸引域とは，ϕ_∞ による $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ の原像に他ならない．したがって，定理 3.1 により，

$$\phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2\}\Big) = \phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_1\} \cup \{\boldsymbol{\omega}_2\}\Big) = \phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_1\}\Big) \cup \phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_2\}\Big) \tag{3.7}$$

などが成立する．ちなみに，各 $\phi_\infty^{-1}\Big(\{\boldsymbol{\omega}_i\}\Big)$ は無限個の初期値からなる無限集合である．

4

線形演算

公理的方法で足し算を作ろう．足し算の無い世界から始めるが，さすがに必要な全てを自作していてはきりが無いので，

□ 小学校の算数 (数の四則演算) だけは，無条件に使えると仮定する．

一例として，$m \times n$ 行列の全体集合 $\mathrm{M}_{m\times n}$ を考えよう．以下，(i,j) 成分が α_{ij} であるような行列を $[\alpha_{ij}]$ と略記する．

□定義 4.1 (行列の相等と線形演算) $[\alpha_{ij}], [\beta_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}$，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $[\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{=} [\beta_{ij}] \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{ij} \overset{\text{数}}{=} \beta_{ij}$ for $\forall i \in [1,m], \forall j \in [1,n]$. (行列の相等)

(2) $[\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [\beta_{ij}] := [\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} \beta_{ij}]$ for $\forall i \in [1,m], \forall j \in [1,n]$. (行列の加法)

(3) $\lambda[\alpha_{ij}] := [\lambda\alpha_{ij}]$ for $\forall i \in [1,m], \forall j \in [1,n]$. (行列のスカラー倍)

ただし，$\forall i \in [1,m]$ は「1 から m までの全ての i について」を表わし，$a := b$ は「a を b で定義する」を表わす．

定義 4.1 では，数の四則演算という既知の算法を使って，行列の線形演算という未知の算法を定義している．こうして定めた線形演算には，次の公式が成立する．

■定理 4.1 (行列の線形演算法則) $\mathrm{M}_{m\times n}$ を $m \times n$ 行列の全体集合とする．

(L1) $A + B = B + A$ for $\forall A, \forall B \in \mathrm{M}_{m\times n}$ (交換律)

(L2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ for $\forall A, \forall B, \forall C \in \mathrm{M}_{m\times n}$ (結合律)

(L3) 加法の零元 $\mathbb{O}_{m\times n} \in \mathrm{M}_{m\times n}$ が存在して，
$A + \mathbb{O}_{m\times n} = \mathbb{O}_{m\times n} + A = A$ for $\forall A \in M_{m\times n}$. (零元の存在)

(L4) $\forall A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ に対して，加法の逆元 $A' \in \mathrm{M}_{m\times n}$ が存在して，
$A + A' = A' + A = \mathbb{O}$. (逆元の存在)

(L5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ for $\forall\lambda, \forall\mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ (スカラー倍の結合律)

(L6) $1 \in \mathbb{R}$ の作用は，$1A = A$ ($1 \in \mathbb{R}$ の作用)

(L7) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ for $\forall\lambda, \forall\mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ (スカラーの分配律)

(L8) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ for $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall A, \forall B \in \mathrm{M}_{m\times n}$ (加法の分配律)

これらの公式を，書き方の練習も含めて，一々証明していくことが，実は抽象ベクトル演算への入門になる．以下，要領を示すので各自試みられたい．証明に成功すると，あまりに一目瞭然なので，教師の「答え合わせ」など必要ないと気付く．

Example 4.1 定義 4.1 (と数の四則演算) だけを使って (L2) を証明せよ．全ての操作に根拠を示せ．

▶ **解答例** $A = [\alpha_{ij}],\ B = [\beta_{ij}],\ C = [\gamma_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}$ と書くことにする．

$$
\begin{aligned}
(A \overset{\text{行列}}{+} B) \overset{\text{行列}}{+} C &= ([\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [\beta_{ij}]) \overset{\text{行列}}{+} [\gamma_{ij}] \\
&= [\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} \beta_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [\gamma_{ij}] && \square\text{定義 4.1 (1)} \\
&= [(\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} \beta_{ij}) \overset{\text{数}}{+} \gamma_{ij}] && \square\text{定義 4.1 (1)} \\
&= [\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} (\beta_{ij} \overset{\text{数}}{+} \gamma_{ij})] && \text{数の “+” の結合律} \\
&= [\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [\beta_{ij} \overset{\text{数}}{+} \gamma_{ij}] && \square\text{定義 4.1 (1)} \\
&= [\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} ([\beta_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [\gamma_{ij}]) && \square\text{定義 4.1 (1)} \\
&= A \overset{\text{行列}}{+} (B \overset{\text{行列}}{+} C)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 定義 4.1 を認めるならば，(L2) が成立する．

全ての操作に根拠を記すことで，(L2) の成立過程が一目瞭然になった．明らかに，(L2) は数の加法の結合律 $(x+y)+z = x+(y+z)$ によって成立している．これなら教師の御墨付など必要あるまい．この方式は読者の自立を助ける．自立せよ．

Exercise 4.1 同様にして (L1) を証明せよ．全ての操作に根拠を示せ．

その他，(L5)，(L6)，(L7)，(L8) も同じように証明できる．ところが，残る (L3)，(L4) は，同じようには証明できない．なぜなら，(L3)，(L4) は「存在」を主張する命題だからである．一般に，**存在** (existence) を証明するには，計算だけでは無理で，

- 該当するものを，実際に作ってみせる．(もしくは作る手順を示す)

ことが必要である．だから (L3) を証明するには，零行列 $\mathbb{O}_{m\times n}$ なるものを実際に作らなければならない．実際に作れたら証明完了である．作り方を見つけるための一般的な方法はないので，トライ・アンド・エラーで見つけるしかない [1]．

Example 4.2 (L3) の零行列 $\mathbb{O}_{m\times n} \in \mathrm{M}_{m\times n}$ を発見せよ．すなわち，(1) $\mathbb{O}_{m\times n} \in \mathrm{M}_{m\times n}$ の候補を作れ．(2) 作った候補が (L3) の条件式を満足することを示せ．

[1] ようするに「存在の証明」＝「発見」である．工学的成果の多くは「存在の証明」である．

▶ **解答例**　(1) $\mathbb{O}_{m\times n} := [o_{ij}]$ s.t.[2] $o_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$　for $\forall i \in [1,m], \forall j \in [1,n]$ という候補を考える．(2) このとき，任意の $[\alpha_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
[\alpha_{ij}] \overset{\text{行列}}{+} [o_{ij}] &= [\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} o_{ij}] \quad \square\text{定義 4.1 (1)}\\
&= [\alpha_{ij} \overset{\text{数}}{+} 0] \quad \text{(1) の構成法}\\
&= [\alpha_{ij}] \quad \text{数の “+” の性質}
\end{aligned}
$$

と計算できるから，$[\alpha_{ij}] + [o_{ij}] = [\alpha_{ij}]$ が成立する．同じく $[o_{ij}] + [\alpha_{ij}] = [\alpha_{ij}]$ も示せるから，(1) の候補 $\mathbb{O}_{m\times n}$ は (L3) の条件を見たす．以上，(L3) の条件を満たす $\mathbb{O}_{m\times n}$ が実際に作れたので，$\mathbb{O}_{m\times n}$ の存在が示された．

Exercise 4.2　同様にして，$A := [\alpha_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}$ に対する加法の逆元 A' を発見せよ．

▶ **ヒント**　(1) 作り方の候補を提案し，(2) その候補が条件式を満すか確かめる．

以上，数の四則演算と，それに基づいた定義 4.1 p17 を定めることによって，定理 4.1 p17 の 8 つの法則 (L1)〜(L8) が成立した．これら 8 つの法則 (L1)〜(L8) を満足するものを「ベクトル」と総称するのだが，その謎解きは次章で述べる．

本章の仕上げとして，直感が効かない例を挙げよう．物理や工学において「重ね合せの原理」として知られる，関数の線形演算である．

□定義 4.2 (実数値関数)　X を集合とする．集合の元 $x \in X$ に実数 $y \in \mathbb{R}$ を一意に [3]対応づけるルール f を**実数値関数**といい，$f : X \to \mathbb{R}$ などと書く．$x \in X$ に対する $y \in \mathbb{R}$ を $f(x)$ と書く．実数値関数の全体集合を $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ と書く．

この厳密な定義によると，これまでの記法 $f(x)$ は関数値であって，関数ではない．関数とはあくまでルール f であり，これに $x \in X$ を代入して得た実数を $f(x)$ と書くのである．

例えば，$f(x) = 0$ は定数関数とはいえない．なぜなら，$x \in X$ での関数値が $f(x) = 0$ だと言ってるだけで，ある特定の $x \in X$ で 0 になる関数なのか，全ての $x \in X$ で 0 になる定数関数なのか分らない．したがって，定数関数なら，そのルールは，

$$f(x) = 0 \quad \text{for } \forall x \in X$$

と定めるべきである．以上の理解に基いて，$f(x)$ ではなく f の線形演算を導入する．

□定義 4.3 (実数値関数の相等と線形演算)　$f, g \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $f \overset{\text{rule}}{=} g \overset{\text{定義}}{\iff} f(x) \overset{\text{数}}{=} g(x)$　for $\forall x \in X$.　(実数値関数の相等)

(2) $f \overset{\text{rule}}{+} g \overset{\text{定義}}{\iff} (f \overset{\text{rule}}{+} g)(x) := f(x) \overset{\text{数}}{+} g(x)$　for $\forall x \in X$.　(実数値関数の加法)

(3) $\lambda f \overset{\text{定義}}{\iff} (\lambda f)(x) = \lambda\big(f(x)\big)$　for $\forall x \in X$.　(実数値関数のスカラー倍)

---

[2]「 ⋯ s.t. 〜」は such that の短縮形で「〜であるような ⋯ 」という意味

[3]「1 通りに」を表わす数学用語.

行列のときと同様に，数の四則演算という既知の算法を使って，関数の線形演算という未知の算法を定義した．行末の $\forall x \in X$ が重要で，これにより定義域 X の全域にわたって，定義 4.3 のルールが適用される．

こう定義してやると，なんと，行列と全く同じ公式が成立するのである．

■定理 4.2 (実数値関数の線形演算法則)　$f, g, h \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．

(L1) $f + g = g + f$ 　(交換律)

(L2) $(f + g) + h = f + (g + h)$ 　(結合律)

(L3) 加法の零元 $\mathbb{O}$ が $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ に存在して，

$f + \mathbb{O} = \mathbb{O} + f = f \quad \text{for } \forall f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ 　(零元の存在)

(L4) $\forall f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ に対して，加法の逆元 $f' \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ が存在して，

$f + f' = f' + f = \mathbb{O}$ 　(逆元の存在)

(L5) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$ 　(スカラー倍の結合律)

(L6) $1 \in \mathbb{R}$ の作用は，$1f = f$ 　($1 \in \mathbb{R}$ の作用)

(L7) $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$ 　(スカラーの分配)

(L8) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ 　(関数の分配)

あまりに浮世離れした問題設定に，気が遠くなってきた読者も少くないと察するが，ふんばりどころである．乗り切るコツは，

- (実数値関数についての) これまでの一切の予備知識を捨てる．
- 数の四則演算と，定義 4.3 に書かれた操作だけで公式を導く．
- 公式の根拠をもれなく列挙できれば，公式の意味は直観できなくてよい．

Example 4.3　(L2) を示せ．関数と数で $+$，$=$ の色を変えると見やすい．

▶ **解答例**　$(f + g) + h = f + (g + h)$ の “=” は関数の相等であるから，定義 4.3 p19 の (1) にしたがい，両辺の値が X の全域で等しいこと，

$$\Big((f + g) + h\Big)(x) \overset{数}{=} \Big(f + (g + h)\Big)(x) \quad \text{for } \forall x \in X$$

を示すのが目標である．不器用にやってみる．$\forall x \in X$ について，

$$\begin{aligned}
\Big((f + g) + h\Big)(x) &\overset{数}{=} (f + g)(x) \overset{数}{+} h(x) && \square定義\ 4.3\ (2)\ 加法 \\
&\overset{数}{=} \big(f(x) \overset{数}{+} g(x)\big) \overset{数}{+} h(x) && \square定義\ 4.3\ (2)\ 加法 \\
&\overset{数}{=} f(x) \overset{数}{+} \big(g(x) \overset{数}{+} h(x)\big) && 数の“+”の結合律 \\
&\overset{数}{=} f(x) \overset{数}{+} \big(g + h\big)(x) && \square定義\ 4.3\ (2)\ 加法 \\
&\overset{数}{=} \Big(f + (g + h)\Big)(x) && \square定義\ 4.3\ (2)\ 加法
\end{aligned}$$

と計算できるから，関数の相等の定義より $(f + g) + h \overset{\text{rule}}{=} f + (g + h)$ が成立する．以上の議論で，f, g, h が実数値関数であること以上の仮定は使ってないから，f, g, h は任意の実数値関数である．ゆえに (L2) が成立する．

Exercise 4.3　同様にして，例えば (L8) を示せ．全ての操作に根拠を示せ．

▶ **ヒント**　数の演算か関数の演算かに注意して，定義 4.3 p19 を使う．

同様にして，少なくとも直観的な理解さえ諦めてしまえば，その他の (L1)，(L5)，(L6)，(L7) も一目瞭然に成立していく．残りの，零元 (L3)，逆元 (L4) の存在は，もちろん具体例を作ることで証明する．

Example 4.4　(L3) の零関数 $\mathbb{O} \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ を発見せよ．すなわち，(1) $\mathbb{O} : X \to \mathbb{R}$ の候補を作れ．(2) 作った候補が (L3) の条件式を満足することを示せ．

▶ **解答例**　(1) $\mathbb{O}(x) := 0$ for $\forall x \in X$ という候補を考える．(2) このとき，任意の $f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\big(f + \mathbb{O}\big)(x) &= f(x) + \mathbb{O}(x) \quad \text{for } \forall x \in X \quad \square\text{定義 4.3 (1) 加法} \\
&= f(x) + 0 \quad \text{for } \forall x \in X \quad \text{候補の構成法} \\
&= f(x) \quad \text{for } \forall x \in X \quad \text{数の } 0
\end{aligned}$$

と計算できるから $f + \mathbb{O} = f$，同じく $\mathbb{O} + f = f$ が成立するから，(1) で作った候補 $\mathbb{O}$ は (L3) の条件を見たす．以上，(L3) の条件を満たす $\mathbb{O}$ が実際に作れたので，$\mathbb{O}$ の存在が示された．

Exercise 4.4　同様にして，$f \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ に対する加法の逆元 f' を発見せよ．

▶ **ヒント**　(1) 作り方の候補を提案し，(2) その候補が条件式を満すか確かめる．

以上，驚くべきことに，適当な相等と線形演算を定めてやると，行列だろうが実数値関数だろうが，同じ 8 つの公式 (L1)〜(L8) が成立してしまった．もちろん行列と実数値関数では実体が異なる．しかし，等号と線形演算を適当に定めてやると，それに基づく筆算が，紙の上では一致してしまうわけである．

この 8 つの公式 (L1)〜(L8) を満すものを「ベクトル」というだが，その謎解きは次の章で．

5

線形空間

行列や実数値関数以外についても，(L1)〜(L8) と同じ形式の公式が作れる．例えば，複素数 $a+bi$ をあえて $[a,b]$ と書き，その全体集合 $\mathbb{C}$ に

(1) 相等 ⋯ $[a,b]=[c,d] \iff a=c,\ b=d$

(2) 加法 ⋯ $[a,b]+[c,d]:=[a+c,b+d]$

(3) スカラ倍 ⋯ $\lambda[a,b]:=[\lambda a,\lambda b]$

(4) 零元 ⋯ $[0,0]$

(5) $[a,b]$ の逆元 ⋯ $[-a,-b]$

を導入すると (L1)〜(L8) と同じ公式が作れる．実は，(L1)〜(L8) が成立する対象は，人間の欲望のおもむくまま，いくらでも作れてしまう．

これらの対象を一括して研究するために，(L1)〜(L8) を改めて公理と見なした**線形空間** (linear space) という台紙を作る．そこから得られた結果は，行列にも実数値関数にもあてはまるはずである．以下，四則演算できる数 (の全体集合) を**スカラー体** (field of scalars) と呼び，これを $\mathbb{K}$ で表わす．実数 $\mathbb{R}$ や複素数 $\mathbb{C}$ はスカラー体である．

□公理 5.1 (線形空間)　集合 V が，スカラー体 $\mathbb{K}$ 上の**線形空間** (linear space) もしくは**ベクトル空間** (vector space) であるとは，V 上に**線形演算**：

(1) V の元の任意の対 (u,v) に，V の新たな元 $u+v$ を対応させる算法:

$$\forall u,\forall v\in V \implies u+v\in V \quad (\text{加法})$$

(2) $\mathbb{K}$ と V の元の任意の対 (λ,v) に，V の新たな元 λv を対応させる算法:

$$\forall \lambda\in\mathbb{K},\forall v\in V \implies \lambda u\in V \quad (\text{スカラー倍})$$

が用意され，これらが次の 8 つの公理 (法則) を満すことをいう．

(L1) $u+v=v+u$ 　for $\forall u,\forall v\in V$ 　(交換則)

(L2) $(u+v)+w=u+(v+w)$ 　for $\forall u,\forall v,\forall w\in V$ 　(結合則)

(L3) 特別な元 $\mathbb{O}_V\in V$ が存在し，$u+\mathbb{O}_V=\mathbb{O}_V+u=u$ 　for $\forall u\in V$.
$\mathbb{O}_V$ を加法の**零元**と呼ぶ. 　(零元の存在)

(L4) $\forall u \in V$ に対して，特別な元 $\overline{u} \in V$ が存在し，$u + \overline{u} = \overline{u} + u = \mathbb{O}_V$.
$\overline{u}$ を加法の**逆元**と呼ぶ．$\overline{u}$ を $-u$ とも書く．　(逆元の存在)

(L5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$　for $\forall\lambda, \forall\mu \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.　(スカラー倍の結合則)

(L6) $1 \in \mathbb{K}$ の作用は，$1u = u$　for $\forall u \in V$　($1 \in \mathbb{K}$ の作用)

(L7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$　for $\forall\lambda, \forall\mu \in \mathbb{K}, \forall u \in V$　(スカラー倍の分配)

(L8) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$　for $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall u, \forall v \in V$　(加法の分配)

V の元を**ベクトル** (vector)，加法の零元を**零ベクトル** (zero vector)，加法の逆元を**逆ベクトル**と呼ぶ．

この公理において，相等，線形演算，零元，逆元の具体形は不定だが，計算方法だけは公理 (L1)〜(L8) によって完全に規定されている．例えば「自転車 + 電車」なる加法を定義することは数学的に十分に可能だが，それが公理 (L1)〜(L8) を満さないなら，線形空間の加法にはならない．

このような抽象的な問題設定から，どんな性質が導かれるのだろうか．

■定理 5.1 (零元と逆元の一意性)　V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．

(1) V の零元 $\mathbb{O}_V$ は一意に存在する．

(2) 各 $v \in V$ に対する逆元 $\overline{v}$ は一意に存在する．

定理の冒頭で「V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする」と宣言したが，これは「V 上の線形演算と公式 (L1)〜(L8) を無条件に使う」と宣言したの同じである．

▶▶ **(一意性の証明方法)**　該当するものを 2 つとって，それらが一致することを示す．

Example 5.1　$\mathbb{O}_V, \mathbb{O}'_V \in V$ が零元 $\Longrightarrow$ $\mathbb{O}_V = \mathbb{O}'_V$ を示せ．

▶ **解答例**　$\mathbb{O}_V, \mathbb{O}'_V \in V$ が零元なら，V の零元の公理 (L3) より，無条件に，

$$\mathbb{O}_V \text{ は零元} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{O}_V + u = u + \mathbb{O}_V = u \quad \text{for } \forall u \in V$$

$$\mathbb{O}'_V \text{ は零元} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{O}'_V + v = v + \mathbb{O}'_V = v \quad \text{for } \forall v \in V$$

が成立する．第 1 式の u は V の任意の元だから，$u = \mathbb{O}'_V \in V$ とおける．

$$\mathbb{O}_V + \mathbb{O}'_V = \mathbb{O}'_V + \mathbb{O}_V = \mathbb{O}'_V$$

同じく第 2 式の v は V の任意の元だから，$v = \mathbb{O}_V \in V$ とおける．

$$\mathbb{O}'_V + \mathbb{O}_V = \mathbb{O}_V + \mathbb{O}'_V = \mathbb{O}_V$$

ゆえに $\mathbb{O}_V$ と $\mathbb{O}'_V$ は同じ元である．以上，$\mathbb{O}_V = \mathbb{O}'_V$ が示されたので，V の零元は一意である．

Exercise 5.1　任意の $v \in V$ をとる．$\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V$ が v の逆元 $\Longrightarrow$ $\overline{v}_1 = \overline{v}_2$ を示せ．

▶ **ヒント**　これもパズルだが，ポイントが若干異なる．逆元の公理 (L4)：

$$\overline{v}_1 \text{は } v \text{ の逆元} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} v + \overline{v}_1 = \overline{v}_1 + v = \mathbb{O}_V$$

$$\overline{v}_2 \text{は } v \text{ の逆元} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} v + \overline{v}_2 = \overline{v}_2 + v = \mathbb{O}_V$$

は無条件に使える．$\overline{v}_1 = \overline{v}_1 + \mathbb{O}_V = \cdots$ ？

次の定理は当たり前に思えるが，□公理 (L1)〜(L8) にない性質なので，■定理として導かなければならない．証明できないなら，妄想だったことになる．

■定理 5.2 ($0, -1 \in \mathbb{K}$ の作用)　V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．

(1) $0 \in \mathbb{K}$ について，$0v = \mathbb{O}_V$ for $\forall v \in V$．($\mathbb{O}_V$ は零元)

(2) $-1 \in \mathbb{K}$ について，$(-1)v = \overline{v}$ for $\forall v \in V$．($\overline{v}$ は v の逆元)

▶▶ **(減法？)**　(2) により，$v \in V$ の逆元 $\overline{v}$ を $-v$ と書くことが正当化される．$u - v := u + (-v)$ と定義すれば，算数と同じ減法が作れる．

Example 5.2　$\forall v \in V$ に対して，$0v = \mathbb{O}_V$ を示せ．

▶ **解答例**　任意の $v \in V$ をとる．$0v$ の逆元を $\overline{0v}$ とすると，

$$\begin{aligned}
0v &= 0v + \mathbb{O}_V && \text{零元の公理 (L3)}\\
&= 0v + (0v + \overline{0v}) && \text{逆元の公理 (L4)}\\
&= (0v + 0v) + \overline{0v} && \text{結合則 (L2)}\\
&= (0+0)v + \overline{0v} && \text{分配則 (L7)}\\
&= 0v + \overline{0v} && \text{数 } 0+0=0\\
&= \mathbb{O}_V && \text{逆元の公理 (L4)}
\end{aligned}$$

Exercise 5.2　$\forall v \in V$ に対して，$(-1)v = \overline{v}$ を示せ．($\overline{v}$ は v の逆元)

▶ **ヒント**　$v + (-1)v = \mathbb{O}_V$ を示すのが目標．$1 \in \mathbb{K}$ の作用 (L6) を使う．

以上，相等，加法，スカラー倍を具体的に定義せぬまま，定理 5.1 と定理 5.2 を証明できてしまった．このような抽象的な成果を利用するには，考察対象の集合に具体的な相等と線形演算を導入し，それが性質 (L1)〜(L8) を満足するなら，定理 5.1 と定理 5.2 をそのまま使えるわけである．

ところで，加法とスカラー倍しか存在しない線形空間 V には，

$$\alpha u + \beta v + \gamma w, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K},\ u, v, w \in V$$

のような元しか存在できない．これを $\{u, v, w\} \subset V$ の**線形結合** (linear combination) もしくは **1 次結合**という．公理 5.1 p22 の (1),(2) を繰り返し用いることで

$$u, v, w \in V,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \Longrightarrow \alpha u + \beta v + \gamma w \in V$$

である．すなわち，線形空間の公理に従うと，V の元から作れる全ての線形結合は V に含まれることになる．

6

$\sum$ の算法

小学校以来，本来なら $\cdots((1+2)+3)+4)+\cdots$ と書くべき数の加法を，なにげに $1+2+3+4+\cdots$ と書いてきた．なぜなら，人によって足し方の順序を換えても答が変らないからである．同様にして，ベクトル (線形空間の要素) の連続的な加法 $u_1+u_2+\cdots$ についても，括弧が省略できることを証明する．数学的帰納法を完全に使いこなせれば目標達成.

なにげに使ってきた総和記号 $\sum$，当然これにも定義がある．定理もある.

□**定義 6.1 (総和記号)**　V を K 上の線形空間とし，$v_1, v_2, \cdots \in V$ とする.

$$\sum_{i=1}^{r} v_i := \begin{cases} v_1 & (r=1) \\ \left(\sum_{i=1}^{r-1} v_i\right) + v_r & (r>1) \end{cases}$$

すなわち総和記号 $\sum$ とは，ある $\left(\sum_{i=1}^{r-1} v_i\right) \in V$ と $v_r \in V$ との加法によって，次の要素 $\left(\sum_{i=1}^{r} v_i\right) \in V$ を定める操作を表している．ようするに,

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \equiv ((\cdots(((v_1+v_2)+v_3)+v_4)+\cdots)+v_{r-1})+v_r.$$

を意味する．このような $\sum$ の定義と線形空間の公理から，次の法則が帰結される.

■**定理 6.1 ($\sum$ の法則)**　V を K 上の線形空間とし，$\lambda \in K$，$v_1, v_2, \cdots \in V$ とする.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{r} v_i + \sum_{i=r+1}^{m} v_i \quad (1 \le r < m)$　(一般結合律 [1])

(b) $\displaystyle\lambda\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m}(\lambda v_i), \quad \sum_{i=1}^{m} v_i + \sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{m}(v_i+w_i)$　(線形性)

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{m} v_i$　(σ は添字 $\{1,2,\cdots,m\}$ の置換)　(一般交換律)

---

[1] この場合の「一般」は項が 3 つ以上の意

例えば，(a) の具体例として $m=3$ のとき，$r=1$ とすると

$$r=1 \text{ とすると，} \sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{1} v_i + \sum_{i=2}^{3} v_i = v_1 + (v_2+v_3),$$

$$r=2 \text{ とすると，} \sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{2} v_i + \sum_{i=3}^{3} v_i = (v_1+v_2) + v_3$$

だが，これは線形空間の公理 (L2) にある 3 要素間の結合則である．

Exercise 6.1 (スカラー倍)　小手調べに，定理 6.1 (b) について，スカラー倍の法則

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda v_i)$$

を，高校流の帰納法で証明せよ．

> ►► **(数学的帰納法)**　自然数 n に関する命題 $P(n)$ が，全ての自然数 n について真であることを示すために，2 つの命題
>
> i)　$P(1)$ は真である．
> ii)　$P(n)$ が真ならば $P(n+1)$ は真である．
>
> を作り，i) と ii) が成立すれば，$P(n)$ は全ての n について真であると結論する．

注意すべき点として，ii) で確かめるのは $P(n)$ 自体の真偽ではなく，含意「$P(n) \Rightarrow P(n+1)$」の真偽である [2)]．ゆえに $P(n)$ は真と仮定するが，その時点で数学一般と矛盾するなら，帰納法によらず「$P(n)$ for $\forall n$ は真」の不成立が確定する．

以上を踏まえて，$\sum$ の加法性を精密に証明しよう．準備として補題を証明しておく．

Exercise 6.2 (4 要素の結合・交換則)　V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．

$$(v_1+v_2)+(w_1+w_2) = (v_1+w_1)+(v_2+w_2) \qquad \text{for } \forall v_1, \forall v_2, \forall w_1, \forall w_2 \in V$$

が成立することを示せ．

本題に戻ると，ここで示したいのは $\sum_{i=1}^{m} v_i + \sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{m}(v_i+w_i)$ だが，数学的帰納法のために次のように言いかえる．

Exercise 6.3 (加法)　自然数 m に関する命題 $P(m)$:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i + \sum_{i=1}^{m} w_i = \sum_{i=1}^{m} (v_i + w_i)$$

が，全ての自然数 m について真であることを示せ．

Exercise 6.4　同様にして，(a) 一般結合律を示せ．

[2)] 含意については定義 1.5 p6 を参照．

さて，残る (c) 一般交換律を証明すれば括弧の省略が正当化される．**群論**と呼ばれる「あみだくじの数学」によって明解に証明できるが，ここでは，具体例で問題意識を喚起するに留める．

□**定義 6.2 (置換)**　置換とは，添字の集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ から添字の集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ への **1 対 1 の対応** $\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$ をいう [3)]．

例えば，置換 $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ の規則を

$$\sigma(1)=2,\quad \sigma(2)=3,\quad \sigma(3)=1$$

のように定めると，これは 3 要素の集合と 3 要素の集合の間の 1 対 1 の対応になっているから，この σ は $m=3$ の置換である．

Exercise 6.5 (一般交換律)　上の置換 σ について $m=3$ の一般交換律を証明せよ．

▶ **ヒント**　$\displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_{\sigma(i)} = (v_{\sigma(1)}+v_{\sigma(2)})+v_{\sigma(3)}$

以上，定理 6.1 の (a)〜(c) により，

$$\begin{aligned}&(\cdots(((v_1+v_2)+v_3)+v_4)+\cdots)+v_n\\&=(\cdots(((v_{\sigma(1)}+v_{\sigma(2)})+v_{\sigma(3)})+v_{\sigma(4)})+\cdots)+v_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

が言えて，これまで無意識に用いてきた**括弧の省略** $v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots+v_n$ が数学的に正当化された．

---

3) 1 対 1 の対応を全単射ともいう．詳細は定義 11.1 p42 を参照.

7

部分空間

線形空間の階層構造をつくる．最小の部分空間が作れたら目標達成．

ある集合に相等と線形演算を定義して，8 つの公理を満たせば線形空間 V ができあがる．しかし，同じ算法に対して，実はもっと広い線形空間を作れていたかも知れない．とはいえ，V は線形演算で閉じているので，単独では外の世界に気付かない．このような自己完結した「井の中の蛙」を線形部分空間という．

□定義 7.1 (線形部分空間)　V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．V の部分集合 $W \subset V$ が，V の線形演算を用いて $\mathbb{K}$ 上の線形空間になるとき，W は V の**線形部分空間** (linear subspace) または単に**部分空間** (subspace) であるという．

自明な例として $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間は，$\mathbb{R}^3$ 自身，原点 $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3}$ を通る平面，原点 $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3}$ を通る直線，原点のみからなる集合 $\{\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3}\}$ の 4 種類である．スケッチしてみよ．

さて，定義 7.1 をそのまま用いて，W が V の線形空間であることを示すには，V の相等と線形演算を使いながら，W に関する (L1)〜(L8) を確かめなくてはならない．同じチェックは，もっと簡単にできるというのが次の定理である．

■定理 7.1 (判定則)　V は $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．$W \subset V$ について，

$$(1)\ W \text{ は } V \text{ の線形部分空間} \quad \overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} \quad (2) \begin{cases} \text{i)}\ \ W \neq \varnothing, \\ \text{ii)}\ \ v, w \in W \implies v + w \in W, \\ \text{iii)}\ \lambda \in \mathbb{K}, v \in W \implies \lambda v \in W. \end{cases}$$

このうちの (1) $\implies$ (2) は明らか．なぜなら，W が V の線形部分空間なら，定義より W は $\mathbb{K}$ 上の線形空間であり必ず零元 $\mathbb{O}_W$ を含むから，i) $W \neq \varnothing$ が成立する．線形空間 W の線形演算の結果は W の元になるから，ii) と iii) が成立する．したがって (2) $\Longrightarrow$ (1) を示そう．

Example 7.1　(2) を仮定したとき，W が線形空間の公理 (L1) を満すことを示せ．

▶ **解答例** $v, w \in W \Longrightarrow v, w \in V \quad \because\ W \subset V$ ☐定義 2.2 p9 部分集合

$$\Longrightarrow v + w = w + v \quad V \text{ に関する ☐公理 5.1 p22 の (L1)}$$

ここで，$v, w \in W \Longrightarrow v + w = w + v$ という命題は，(1.1) p8 より，

$$v + w = w + v \text{ for } \forall w, \forall v \in W$$

と同値だから，W に関する (L1) が示された．

Exercise 7.1 同様にして，例えば W に関する (L2) を示せ．

Example 7.2 W における零元 $\mathbb{O}_W$ の存在 (L3) を示せ．

▶ **解答例** 存在の証明だから $\mathbb{O}_W$ を作る．候補を $\mathbb{O}_W := \mathbb{O}_V$ とおくと，

$$w \in W \Longrightarrow w \in V \quad \because\ W \subset V \quad \text{☐定義 2.2 p9 部分集合}$$

$$\Longrightarrow w + \mathbb{O}_V = \mathbb{O}_V + w \quad V \text{ に関する ☐公理 5.1 p22 の (L3)}$$

$$\Longleftrightarrow w + \mathbb{O}_W = \mathbb{O}_W + w \quad \because\ \mathbb{O}_W = \mathbb{O}_V \quad \text{候補の定義}$$

より，$\mathbb{O}_W := \mathbb{O}_V$ は W の零元ゆえ，W に関する (L3) が示された．

Exercise 7.2 同様にして，W における逆元 $-w$ の存在 (L4) を示せ．

残りの法則 (L5)〜(L8) も同様に示せる．次に，すでにある線形部分空間を組合せて，新しい線形部分空間を作る方法を考える．

■命題 7.2 W_1 と W_2 が V の線形部分空間ならば，$W := W_1 \cap W_2$ もまた V の線形部分空間である．

まず，W に関する判定則の i) は明らか．なぜなら，W_1 も W_2 も V の線形部分空間だから，零元に注目すると，Example 7.2 p29 より

$$W_1 \ni \mathbb{O}_{W_1} = \mathbb{O}_V = \mathbb{O}_{W_2} \in W_2$$

となる．これは $\mathbb{O}_V \in W_1 \cap W_2$ を意味するから，$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$．

Example 7.3 命題 7.2 の W に関する判定則の iii) を示せ．

▶ **解答例** 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ と $w \in W_1 \cap W_2$ をとる．

$$w \in W_1 \cap W_2 \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} w \in W_1 \text{ and } w \in W_2 \quad \text{☐定義 2.4 p10 集合積}$$

$$\Longrightarrow \lambda w \in W_1 \text{ and } \lambda w \in W_2 \quad \because\ W_1 \text{ と } W_2 \text{ は線形部分空間}$$

$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \lambda w \in W_1 \cap W_2 \quad \text{☐定義 2.4 集合積}$$

Exercise 7.3 同様にして，判定則の ii) を示せ．

■定理 7.3 (線形部分空間の生成)　$\mathbb{K}$ 上の線形空間 V の部分集合 $\Omega := \{v_1, \cdots, v_r\}$ を任意にとる．このとき，Ω を含む最小の線形部分空間 $L(\Omega)$ が存在する．すなわち，

(1) $\Omega \subset L(\Omega)$.

(2) $L(\Omega)$ は線形部分空間.

(3) Ω を含む任意の線形部分空間 D に対して，$L(\Omega) \subset D$．(最小性)

となる $L(\Omega)$ が構成できる．これを，Ω から**生成された線形部分空間**という．

►► **(存在の証明方法)**　該当するものを実際に作ってみせる.

►► **(集合の大小)**　数の大小は，大小関係 $x < y$．集合の大小は，包含関係 $X \subset Y$.

►► **(最小の集合)**　閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ の最小数の定義：

$$a \in I \text{ は最小} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} a \leq x \text{ for } \forall x \in I$$

を真似て，集合族 [1] $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \cdots\}$ の最小元を，次のように定める.

$$A \in \mathcal{A} \text{ は最小} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} A \subset X \text{ for } \forall X \in \mathcal{A}.$$

$L(\Omega)$ の構成方法は 2 種類あって，1 つは集合積による方法，もう 1 つは線形結合による方法である．まず，制御理論などに出てくる線形結合による方法を取り上げる.

■命題 7.4 (span による $L(\Omega)$ の構成)　$\Omega := \{b_1, b_2, \cdots, b_r\} \subset V$ からなる線形結合の全体集合：

$$\mathrm{span}(\Omega) := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j b_j \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K} \right\}$$

は定理 7.3 の (1)〜(3) を満たす．すなわち $\mathrm{span}(\Omega)$ は $L(\Omega)$ の一例となる.

Example 7.4　「(1) $\Omega \subset \mathrm{span}(\Omega)$」を示せ.

► **解答例**　任意の $b \in \Omega$ をとると，b は $b_1, \cdots, b_r$ のどれかである．これらは，自分の係数だけを 1 とする線形結合 $b = b_i = 0b_0 + \cdots + 1b_i + \cdots + 0b_r$ で書けるので，$\mathrm{span}(\Omega)$ の要素である．すなわち，$b \in \Omega \implies b \in \mathrm{span}(\Omega)$ が成立するので，部分集合の公理により $\Omega \subset \mathrm{span}(\Omega)$ である.

Exercise 7.4　「(2) $\mathrm{span}(\Omega)$ は V の線形部分空間」を示せ.

► **ヒント**　定理 7.1 の i)〜iii) の成立を示す.

Exercise 7.5　「(3) Ω を含む V の線形部分空間 D に対して，$\mathrm{span}(\Omega) \subset D$」を示せ.

► **ヒント**　任意の $x \in \mathrm{span}(\Omega)$ をとると，適当な係数で $x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j b_j$ と書ける．ここで，$b_1, \cdots, b_r \in \Omega \subset D$ より，$b_1, \cdots, b_r \in D$ が言える．ゆえに，$b_1, \cdots, b_r$ の線形結合である x は，定理 7.1 の ii) iii) より ⋯

---

[1] 集合 $\{a, b\}, \{1, 2, 3\}$ を要素とする集合 $\{\{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ のことを，集合族 (family) という.

Exercise 7.6 (最小性からの帰結)　次を示せ.

(1) $L(\Omega)$ は一意に存在する.

(2) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \implies L(\Omega_1) \subset L(\Omega_2)$

▶ **ヒント**　(1) について，2 つの $L(\Omega), L'(\Omega)$ をとると，それぞれの最小性によって互いに小さくなり合うが，これに集合の相等を使う．(2) は $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset L(\Omega_2)$ より，$L(\Omega_2)$ もまた Ω_1 を含む部分空間だが，そこに $L(\Omega_1)$ の最小性を使う．いずれも「最小の集合」に関する標準論法 2).

もう 1 つの構成法として，集合積による方法も挙げておく.

▶▶ **(一意性の恩恵)**　Exercise 7.6 の (1) の一意性により，Ω から生成された $L(\Omega)$ は一意だから，以下に構成する $L(\Omega) = W_\infty$ は，$W_\infty = L(\Omega) = \mathrm{span}(\Omega)$ となる．要素の集め方は違うのだが，出来上がった集合は同じになる.

□定義 7.2 (一般の集合積と集合和)　n 個の集合 $A_1, \cdots, A_n$ の共通部分を $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ と書くが，同じことを添字の集合 $\Lambda := \{1, \cdots, n\}$ を用いて $\bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ と書く．これを一般化して，添字の集合 Λ が有限集合でも無限集合でも使えるように,

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \overset{\text{定義}}{\iff} \forall\lambda \in \Lambda;\ x \in A_\lambda \qquad \text{(集合積)}$$

$$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \overset{\text{定義}}{\iff} \exists\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda \qquad \text{(集合和)}$$

と定義する.

■命題 7.5 (集合積による $L(\Omega)$ の構成)　「Ω を含む V の線形部分空間 W_λ」の全体集合 $\mathcal{W} := \{W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考える．その全ての W_λ の共通部分：

$$W_\infty := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda.$$

は定理 7.3 の (1)〜(3) を満たす．すなわち W_∞ は $L(\Omega)$ の 1 つの構成法を与える.

Example 7.5　「(1) $\Omega \subset W_\infty$」を示せ.

▶ **解答例**　W_λ の定義より，Ω は全ての $W_\lambda \in \mathcal{W}$ に含まれるから,

$$\begin{aligned}
&(x \in \Omega \implies x \in W_\lambda) \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \\
\equiv\quad & x \in \Omega \implies (x \in W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda) \quad \because x \in \Omega \text{ は } \lambda \text{ と無関係} \\
& \iff x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda =: W_\infty \quad \text{□定義 7.2 p31}
\end{aligned}$$

ゆえに $x \in \Omega \implies x \in W_\infty$，すなわち $\Omega \subset W_\infty$ がいえる.

---

2) 著者が知っているだけでも，位相空間論，測度論，確率論などの証明に頻繁に出てくる.

Example 7.6　「(2) W_∞ は V の線形部分空間」を示せ.

▶ **解答例**　全ての $W_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ は, V の線形部分空間だから,

$$\mathbb{O}_V \in W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \iff \mathbb{O}_V \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda =: W_\infty \quad \square\text{定義 7.2 p31}$$

より, i) $W_\infty \neq \varnothing$ がいえる. 次に,

$$\begin{aligned} x, y \in W_\infty = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda \iff x, y \in W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \quad &\square\text{定義 7.2} \\ \Longrightarrow x + y \in W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \quad &W_\lambda \text{ の ii)} \\ \iff x + y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda =: W_\infty \quad &\square\text{定義 7.2} \end{aligned}$$

より, ii) $x, y \in W_\infty \Longrightarrow x + y \in W_\infty$ が言える. 同様に iii) を示せ.

Example 7.7　「(3) W_∞ は Ω を含む V の線形部分空間のなかで最小」を示せ.

▶ **解答例**　定義 7.2 の $\Longrightarrow$ だけ使うと,

$$x \in W_\infty \Longrightarrow \big(x \in W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda\big)$$

$$\equiv \big(x \in W_\infty \Longrightarrow x \in W_\lambda\big) \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \quad \because x \in W_\infty \text{ は } \lambda \text{ と無関係}$$

$$\equiv W_\infty \subset W_\lambda \text{ for } \forall\lambda \in \Lambda \qquad \equiv W_\infty \subset W_\lambda \text{ for } \forall W_\lambda \in \mathcal{W}$$

より, W_∞ は任意の $W_\lambda \in \mathcal{W}$ より小さいので最小である.

命題 7.5 p31 の集合積による構成法は, 最小の集合を作るための常套手段として, 線形代数以外でもよく用いられる. これに対して, 線形結合を寄せ集める命題 7.4 の方法は, 線形空間が線形演算で閉じる性質をうまく使っている.

8

基底と座標

わざと「ベクトル」の直観が通用しない例を使って，基底と座標の仕組を理解する．

□定義 8.1 (2 次多項式の空間)　2 次以下の多項式の全体集合

$$\mathcal{P}_2 := \{\, \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \subset \mathbb{R},\ x\ \text{は不定元}\,\}$$

を考える．$a, b \in \mathcal{P}_2 \implies a = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,\ b = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ と書けるが，これらの相等と線形演算を次のように定める．

- $a = b \overset{\text{定義}}{\iff} \alpha_i = \beta_i\ (i = 0, 1, 2)$
- $a + b := (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_2 + \beta_2)x^2$
- $\lambda a := (\lambda\alpha_0) + (\lambda\alpha_1)x + (\lambda\alpha_2)x^2$

このとき $\mathcal{P}_2$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．

Exercise 8.1　(1) 線形空間の公理 (L7) を確かめよ．(2) $\mathcal{P}_2$ の零元 $\mathbb{O}_{\mathcal{P}_2}$ を構成せよ．

□定義 8.2 (基底)　$\mathbb{K}$ 上の線形空間 V の部分集合 $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ で，

(1) どんな $v \in V$ も，$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$ と書ける．

(2) その係数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ の決り方が，**一意**である．

となるものを V の**基底** (basis) という．各 b_i を**基底ベクトル**という．

この定義より，V の任意のベクトルは基底 $\mathcal{B} \subset V$ の線形結合で 1 通りに書ける．

Exercise 8.2　$\mathcal{P}_2$ の部分集合 $\{1, x, x^2\}$ が，$\mathcal{P}_2$ の基底であることを示せ．

基底から自然に導かれる概念として，座標がある． そのために，基底ベクトルの順序を指定した基底を導入する．これを $\mathcal{B} = \langle b_1, \cdots, b_n \rangle$ と書き，**順序基底** (ordered basis) と呼ぶ．

□定義 8.3 (座標写像)　V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．V の順序基底 $\mathcal{B} := \langle b_1, b_2, \cdots, b_n \rangle$ をとると，定義 8.2 より，$\forall v \in V$ は一意に $v = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \cdots + \xi_n b_n$ と書ける．その一意に書けた係数を取り出す $\mathbb{K}^n$ 値関数,

$$\varphi_{\mathcal{B}}(v) = \varphi_{\mathcal{B}}(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \cdots + \xi_n b_n) := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

を $\mathcal{B}$ で定まる**座標写像** (coordinate map) という．$v \in V$ に対する $x = \varphi_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{K}^n$ を，$\mathcal{B}$ で定まる $v \in V$ の**座標** (coordinate) もしくは**成分** (component) という．

このように，基底 $\mathcal{B}$ を定めると座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ が定まり，座標写像を使うと抽象ベクトル $v \in V$ を数値化 $x = \varphi_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{K}^n$ できる．

Exercise 8.3　$\mathcal{P}_2$ の順序基底 $\mathcal{B} := \left\langle 1, x, x^2 \right\rangle$ で定まる

$$p = 1 + 2x + x^2 \in \mathcal{P}_2 \tag{8.1}$$

の座標を求めよ．

▶▶　$\mathcal{B}$ を**テイラー型基底**という．

Exercise 8.4　$\mathcal{P}_2$ の順序基底を次のように選ぶ．

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\langle L_0(x), L_1(x), L_2(x) \right\rangle \\ &:= \left\langle \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)},\ \frac{(x-\lambda_0)(x-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_2)},\ \frac{(x-\lambda_0)(x-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_1)} \right\rangle \end{aligned} \tag{8.2}$$

Λ で定まる p の座標 $\varphi_{\Lambda}(p)$ を求めよ．簡単のため，$\lambda_0 = 1$，$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 3$ とせよ．

▶▶　Λ を**ラグランジュ補間基底**と呼ぶ

▶ **ヒント**　何らかの方法で $p = 1 + 2x + x^2 = \xi_0 L_0(x) + \xi_1 L_1(x) + \xi_2 L_2(x)$ の形に書き下し，座標 $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)^T$ を割り出す．ラグランジュ補間基底は,

$$L_k(\lambda_l) = \delta_{kl} := \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{8.3}$$

という性質を持つので，両辺に $x = \lambda_i$ を代入することで，係数 ξ_i が判明する．

このように,

- 基底を定めないかぎり，ベクトルの座標は存在すらできない．
- ベクトルが同じでも，基底が違えば座標は変化する．

応用上は，いきなり空間座標 (x, y, z) を導入することも多いが，これは $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ によって，空間の点の位置ベクトルの座標を定めたこと相当する．

9

基底の特徴付け

線形空間 V は無限個のベクトルからなるが [1]，その構造は有限個のベクトルで記録できる．その個数を最小化したものが基底になるのだが，以下，詳しく見ていく．

まず，話の前提として，$\mathbb{K}$ 上の線形空間 V の有限部分集合 $\Omega = \{b_1, \cdots, b_r\}$ に対して，$\mathrm{span}(\Omega)$ p30 は線形部分空間となった．$V' := \mathrm{span}(\Omega)$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間で，有限集合 Ω から生成されている．この Ω が基底の候補となる．

Exercise 9.1 $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ は，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を使うと，$\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と書けることを示せ．

▶ **ヒント** "=" は集合の相等だから，定義 2.3 p10 より $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ かつ $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を示す．

それでは，最小の Ω とはどういうものか？ — そのための条件を式で表すために，線形独立性 (linear independency) の概念が導入される．

□定義 9.1 (線形独立) V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．V の有限部分集合 $D := \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が，**線形独立** (linearly independent) であるとは，

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \mathbb{O}_V \implies (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) = (0, \cdots, 0)$$

であることをいう．

□定義 9.2 (線形従属) 線形独立でないこと，すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \mathbb{O}_V \ \ \text{and} \ \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \neq (0, \cdots, 0)$$

であることを，**線形従属** (linearly dependent) という．線形従属の定義は，0 でない係数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \neq (0, \cdots, 0)$ の存在を述べている．

---

[1] 例外的に $\{\mathbb{O}_V\}$ は要素数 1 の線形空間だが，それ以外は無数の $\lambda \in \mathbb{K}$ から無数の $\lambda v \in V$ が作れる．

Exercise 9.2　定義 9.1($P \Rightarrow Q$) の否定が，定義 9.2($P \wedge \neg Q$) に一致することを，それぞれの真理表を比較して示せ．

ちなみに，どちらの定義にも $D = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ の線形結合を $\mathbb{O}_V$ においた，

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = \mathbb{O}_V$$

が表われる．この式は，線形演算で書ける $v_1, v_2, \cdots, v_r \in D$ の相互関係を表わしているので，Ω の**線形関係式** (linear relationship) と呼ばれる．

次に，線形空間 V の広さを数値化する．線形空間 V の要素数は一般に ∞ 個だから，要素数では広さは表せない．そこで線形独立性を用いる．

□定義 9.3 (次元)　集合 D の要素数を $\#D$ と書く．V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．

$$\dim V = \max \left\{ \#D \;\middle|\; D \text{ は } V \text{ の線形独立部分集合 } \right\}$$

を V の**次元** (dimension) という．すなわち，線形独立にとれるベクトルの**最大個数**を V の次元という．V は $\dim V = n < \infty$ のとき**有限次元** (finite dimension)，そうでないとき**無限次元** (infinite dimension) といわれる．

仕上げに，線形空間 V を生成するのにぎりぎり必要な部分集合 $\mathcal{B}$ を導入すると，次の定理を得る．

■定理 9.1 (基底の特徴付け)　V は $\mathbb{K}$ 上の線形空間で，$\dim V = n < \infty$ とする．V の有限部分集合 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\} \subset V$ について，次の 3 条件は同値．

(0) 定義 8.2 p33：任意の $v \in V$ に対して，係数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ が**一意**に定まり，$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$ と書ける．(**成分表示の一意性**)

(1) $\mathcal{B}$ は線形独立，かつ $V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$．

(2) $\mathcal{B}$ は線形独立，かつ $\forall c \in V \setminus \mathcal{B}$ を付加した $\mathcal{B} \cup \{c\}$ は線形従属．(**極大線形独立**)

Exercise 9.3　定理 9.1 の (1) $\Longrightarrow$ (0) を示せ．

▶ **ヒント**　$\mathcal{B}$ は線形独立，かつ $V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$ を仮定する．まず，$V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$ を前提に，同じ $v \in V$ が，2 通りの係数で

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$$

と書けたとすると，$\mathcal{B}$ の線形独立性より 2 つの係数は ⋯

Exercise 9.4　定理 9.1 の (0) $\Longrightarrow$ (2) を示せ．

▶ **ヒント**　$\forall v \in V$ が一意に $v = \sum \lambda_j b_j$ と書けると仮定する．すると $c \in V \setminus \mathcal{B}$ は V の元だから当然 $c = \sum \gamma_j b_j$ と一意に書ける．ならば $\sum \gamma_j b_j - c = \mathbb{O}_V$ であるが，これは $\mathcal{B} \cup \{c\}$ の線形関係式である．c の係数は？

次の証明には背理法を使う．

▶▶ **(背理法)**　$P \implies Q$ が真であることを示すため，$\neg Q$ を仮定して何らかの矛盾を導く証明法．導く矛盾は，P との矛盾でもよいし，数学一般との矛盾でもよい．類似の方法に，$P \implies Q$ と同値な対偶 $\neg Q \implies \neg P$ を示す方法があるが，背理法はあらかじめ $\neg P$ を狙わない分だけ条件が緩い．

Example 9.1　定理 9.1 の (2)$\implies$(1) を示せ．

▶ **解答例**　「$\mathcal{B}$ は線形独立」は共通の条件なので，チェック不要．ゆえに，

$$「\forall c \in V \setminus \mathcal{B},\ \mathcal{B} \cup \{c\} \text{ は線形従属}」 \implies V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$$

を示せばよい．背理法のため $V \neq \mathrm{span}(\mathcal{B})$ を仮定する．$V \subsetneq \mathrm{span}(\mathcal{B})$ だと線形空間 V に矛盾するので，$\mathrm{span}(\mathcal{B}) \subsetneq V$ と仮定する．この条件は，

$$\mathrm{span}(\mathcal{B}) \subsetneq V \iff V \setminus \mathrm{span}(\mathcal{B}) \neq \varnothing \iff \exists c \in V \setminus \mathrm{span}(\mathcal{B})$$

と同値変形できる．この $c \in V$，$c \notin \mathrm{span}(\mathcal{B})$ を使って，$\mathcal{B} \cup \{c\}$ の線形関係式：

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n + \lambda_{n+1} c = \mathbb{O}_V$$

を仮定する．ここで（プチ？）背理法のため $\lambda_{n+1} \neq 0$ を仮定すると，

$$c = \frac{-1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) \in \mathrm{span}(\mathcal{B})$$

とできるから $c \notin \mathrm{span}(\mathcal{B})$ に矛盾する．ゆえに $\lambda_{n+1} = 0$ でなければならない．このとき，$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n + \lambda_{n+1} c = \mathbb{O}_V \implies \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = \mathbb{O}_V$ と $\mathcal{B}$ の線形独立性によって $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ より，全ての係数が 0 になるから，$\mathcal{B} \cup \{c\}$ は線形独立である．これは矛盾だから，最初にかえって，$V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$ である．

これで一巡 (1)$\Rightarrow$(0)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(1) したので，(1), (2), (0) は互いに同値である．

定理 9.1 より，次のことが分かる．

- (1) より，基底 $\mathcal{B}$ を使えば，必ず $V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$ となる．
- (2) より，$V = \mathrm{span}(\Omega)$ となる Ω のなかで，基底 $\Omega := \mathcal{B}$ が最小である．

以上，V の基底 $\mathcal{B}$ とは，線形空間 V を生成できる最も小さな部分集合である．

10

線形写像

定義 3.1 p13 を復習すると，写像とは，$a \in A$ に対して $T(a) \in B$ が**一意**に定まる対応関係 $T : A \to B$ のことであった.

□公理 10.1 (線形写像)　V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．写像 $T : V \to W$ で,

(L1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$　for $\forall x, \forall y \in V$.

(L2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$　for $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V$.

となるものを**線形写像** (linear mapping) という．線形写像 $T : V \to W$ の全体集合を $\mathcal{L}(V, W)$ と書く．特に，自分自身への線形写像 $T : V \to V$ を**線形変換** (linear transformation) という.

Exercise 10.1　座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ p33 について，$\varphi_{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K}^n)$ を示せ.

► **ヒント**　$\sum$ と数ベクトルの線形演算, $\sum \alpha_i b_i + \sum \beta_i b_i := \sum(\alpha_i + \beta_i) b_i$，$\lambda \sum \alpha_i b_i := \sum(\lambda\alpha_i) b_i$，$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{bmatrix}$，$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix}$.

Exercise 10.2 (多項式の微分)　定義 8.1 の 2 次以下の多項式の空間 $\mathcal{P}_2$ を考える．その要素 $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ に対する微分操作,

$$D(p) = D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) := \alpha_1 + (2\alpha_2)x \tag{10.1}$$

について，$D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_2)$ を示せ.

► **ヒント**　任意の $p, q \in \mathcal{P}_2$ とスカラ $\lambda \in \mathbb{K}$ をとり，$D(p + q) = D(p) + D(q)$ と $D(\lambda p) = \lambda D(p)$ を示せばよい.

■定理 10.1 (線形写像の性質)　$T \in \mathcal{L}(V, W)$ は次の性質を示す.

(1) $T(\mathbb{O}_V) = \mathbb{O}_W$.

(2) 像 $T(V)$ は W の線形部分空間.

(3) 原像 $T^{-1}(\{O_W\})$ は V の線形部分空間.

(4) $D \subset V$ について，$T\big(\mathrm{span}(D)\big) = \mathrm{span}\,\big(T(D)\big)$.

Exercise 10.3 (1) を示せ.

▶ **ヒント** $\forall v \in V$ に対して，$T(0v) =?$

Exercise 10.4 (2) を示せ.

▶ **解答例** $\forall w_1, \forall w_2 \in T(V)$ に対して，$\exists v_1, \exists v_2 \in V : w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$ となる．このとき，$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2)$

$$= T(v_1 + v_2) \quad \because T \text{ は線形写像}$$

$$\in T(V) \quad \because v_1 + v_2 \in V$$

同様に $w \in T(V) \implies \lambda w \in T(V)$ を示せ．$T(V) \neq \varnothing$ は (1) より $\mathbb{O}_W \in T(V)$ なので明らか.

Exercise 10.5 (3) を示せ.

▶ **ヒント** $\forall v_1, \forall v_2 \in T^{-1}(\{\mathbb{O}_W\})$ をとり，p14 の同値変形 $v_i \in T^{-1}(\{\mathbb{O}_W\}) \iff T(v_i) \in \{\mathbb{O}_W\}$ を用いる．$\mathbb{O}_W \in \{\mathbb{O}_W\}$ に注意する.

Exercise 10.6 (4) すなわち $w \in T\big(\mathrm{span}(D)\big) \iff w \in \mathrm{span}\,\big(T(D)\big)$ を示せ.

▶ **ヒント** $D := \{b_1, \cdots, b_r\}$ とする. 像の定義 (3.2) より $T(D) = \{T(b_1), \cdots, T(b_r)\}$ に注意しておく．まず，$\forall w \in T\big(\mathrm{span}(D)\big)$ をとると,

$$\implies \exists v \in \mathrm{span}(D) : w = T(v) {=} T(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r) \quad \because v \in \mathrm{span}(D)$$

$$= \lambda_1 T(b_1) + \cdots + \lambda_r T(b_r) \quad \because T \text{ は線形写像}$$

$$\in \mathrm{span}\,\big(T(D)\big)$$

が示される．同様に逆を示せ.

□**定義 10.2 (像空間と核空間)** 定理 10.1 で導入した,

(1) $\mathrm{im}T := T(V)$ を，T の**像空間**または**像** (image) という.

(2) $\ker T := T^{-1}(\{\mathbb{O}_W\})$ を，T の**核空間**または**核** (kernel) という.

■**補題 10.2 (im$T$ の基底)** V を n 次元線形空間とする．$\ker T \subset V$ の基底を $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_r\}$ とするとき,

(1) $\mathcal{B}$ を含む V の基底 $\mathcal{B} \cup \{b_{r+1}, \cdots, b_n\}$ が構成できる.

(2) $\mathcal{E} := \{T(b_{r+1}), \cdots, T(b_n)\}$ は $\mathrm{im}T$ の基底となる.

▶ **証明** (1) V は n 次元だから，独立なベクトルを最大 n 個とれる．その最初の r 個を $\mathcal{B} := \{b_1, \cdots, b_r\} \subset V$ とし，残りを $\mathcal{C} := \{b_{r+1}, \cdots, b_n\} \subset V$ とすれば，これらを合せた $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{b_1, \cdots, b_r, b_{r+1}, \cdots, b_n\}$ は V の n 個の独立なベクトルからなり，V の基底となる.

(2) 定理 10.1(4) より，まず，$\mathrm{im}T = T(V) = T\big(\mathrm{span}(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})\big)$

$$= \mathrm{span}\,\big(T(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})\big) = \mathrm{span}\,\big(T(\mathcal{B})\cup T(\mathcal{C})\big) \quad \because \text{定理 3.2(2)}$$

$$= \mathrm{span}\,\big(\{\mathbb{O}_W\}\cup T(\mathcal{C})\big) = \mathrm{span}\,\big(T(\mathcal{C})\big) = \mathrm{span}\,(\mathcal{E})$$

が示される．次に，$\mathcal{E} = T(\mathcal{C})$ の独立性を見るために，線形関係式 $\alpha_{r+1}T(b_{r+1}) + \cdots + \alpha_n T(b_n) = \mathbb{O}_W$ を仮定すると，T は線形写像より，

$$\{\mathbb{O}_W\} \ni \mathbb{O}_W = \alpha_{r+1}T(b_{r+1}) + \cdots + \alpha_n T(b_n) = T\big(\alpha_{r+1}b_{r+1} + \cdots + \alpha_n b_n\big)$$

となるが，同値変形より，

$$\alpha_{r+1}b_{r+1} + \cdots + \alpha_n b_n \in T^{-1}(\{\mathbb{O}_W\}) = \ker T \tag{10.2}$$

となる．ゆえに，左辺は $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_r\}$ の線形結合で，

$$\alpha_{r+1}b_{r+1} + \cdots + \alpha_n b_n = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_r b_r \tag{10.3}$$

と書ける．$\{b_1, \cdots, b_r, b_{r+1}, \cdots, b_n\}$ は V の基底で独立だから，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ が得られる．ゆえに $\mathcal{E}$ は独立である．ゆえに定理 9.1 p36 より，$\mathcal{E}$ は $\mathrm{im}T$ の基底である．

■定理 10.3 (次元定理)　$\dim V = \dim\ker T + \dim\,\mathrm{im}T$

▶ **証明**　補題 10.2 の各基底の要素数より明らか．

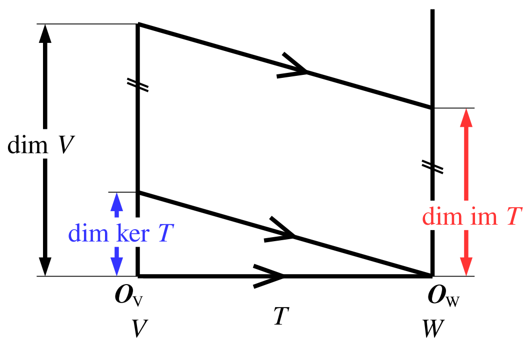


図 10.1　次元定理のイメージ図 (単なる暗記用で深い意味はなし)

□定義 10.3 (階数と退化次数)　$T \in \mathcal{L}(V, W)$ について，

(1) $\mathrm{rank}T := \dim\,\mathrm{im}T$ を，T の**階数** (rank) という．

(2) $\mathrm{null}T := \dim\ker T$ を，T の**退化次数** (nullity) という．

具体例として，次の連立方程式を考える．未知数より方程式の本数が少ない．

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \eta_1 \\ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = \eta_2 \end{cases} \tag{10.4}$$

行列 $A \in \mathrm{M}_{2\times 3}$ とベクトル $x \in V = \mathbb{R}^3$, $y \in W = \mathbb{R}^2$ で表示すると，

$$Ax = y: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

である．まず，$y = 0$ の場合を考える．

$$T(x) := Ax = 0: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

これを満足する x は，線形写像 $T(x) := Ax$ の核空間に含まれる．すなわち，$x \in \ker T$．各行を辺々足し引きすると，x の成分について次の関係式が得られる．

$$2\xi_1 + 2\xi_3 = 0, \quad 2\xi_2 = 0 \tag{10.7}$$

これより，核空間は,

$$\ker T = \{\, (\xi, 0, -\xi)^T \mid \xi \in R \,\} \quad = \mathrm{span}\left\{(1, 0, -1)^T\right\} \tag{10.8}$$

であることが分かる．すなわち，核空間の基底は $\mathcal{B} = \left\{b_1\right\}$, $b_1 = (1, 0, -1)^T$ である．V の残りの基底ベクトルを，例えば,

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} = \left\{b_2, b_3\right\}, \quad b_2 := (1/2, 1/2, 0)^T,\ b_3 := (1/2, -1/2, 0)^T \tag{10.9}$$

のように選ぶと，$\mathrm{im}T$ の基底は,（$\mathcal{C}$ を都合よく取ったので）

$$\mathcal{E} = T(\mathcal{C}) = \left\{Ab_2, Ab_3\right\} = \left\{e_1, e_2\right\}, \quad e_1 = (1, 0)^T,\ e_2 = (0, 1)^T \tag{10.10}$$

となる．以上を踏まえて，$y \neq 0$ の場合の解は，次のように書ける．

$$x = \eta_1 b_2 + \eta_2 b_3 + \xi b_1 = \eta_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \forall \xi \in R \tag{10.11}$$

代入すると，確かに,

$$T(x) = Ax = \eta_1 Ab_2 + \eta_2 Ab_3 + \xi Ab_1 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + 0 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = y \tag{10.12}$$

を満足している．なお，この問題の階数は $\mathrm{rank}T := \dim\, \mathrm{im}T = \#\mathcal{E} = 2$, 退化次数は $\mathrm{null}T := \dim \ker T = \#\mathcal{B} = 1$ である．

このように，$\ker T$ や $\mathrm{im}T$ は慣れないうちは難解かも知れないが，応用上不可欠な情報を含んでいる．知らない人は，ξb_1 の項を見落してしまうかも？

なお，このような問題の一般論は 13 章で述べる．

11

線形同型

座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ を題材に，無限集合どうしの 1 対 1 対応を立証するための技法をまとめておく．

V と $\mathbb{K}^n$ の要素は無限個あるから，要素を 1 つずつ比較して 1 対 1 を示すわけにはいかない．そこで代りに，写せない領域がないこと (全射)，かつ写しに重複がないこと (単射) を示す．

□**定義 11.1 (全単射)**　写像 $T : A \to B$ が**全射** (surjection) であるとは，

$$\forall b \in B, \exists a \in A : b = T(a).$$

写像 $T : A \to B$ が**単射** (injection) であるとは，$a_1, a_2 \in A$ について，

$$a_1 \neq a_2 \implies T(a_1) \neq T(a_2).$$

全射かつ単射の写像を**全単射** (bijection) もしくは **1 対 1 の対応** (one-to-one correspondence) という．単射の対偶 $T(a_1) = T(a_2) \implies a_1 = a_2$ をよく用いる．

全射かつ単射で本当に 1 対 1 になるのか，具体例で確認しよう．例えば，全社員のリストを A，登録済みメールアドレスのリストを B とし，社員からメールアドレスへの対応表 $T : A \to B$ を作る．T が写像であるとは，メールアドレスを持たない社員や，メールアドレスを複数持つ社員がいないことをさす ($\forall a \in A$ に対する $b = T(a) \in B$ が一意に存在する)．T が全射であるとは，未使用のメールアドレスがないことをさす ($\forall b \in B$ について $b = T(a)$ となる $a \in A$ が存在する)．T が単射であるとは，複数名によるメールアドレスの共有がないことをさす ($a_1 \neq a_2 \implies T(a_1) \neq T(a_2)$)．ここでもし，余剰のメールアドレスがなくて (全射)，なおかつ共有もないなら (単射)，社員とメールアドレスとの対応 T は 1 対 1 であろう．

Exercise 11.1　定義 8.3 p33 の座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ が，全単射であることを示せ．

▶ **ヒント**　全射の証明は，**存在の証明** p30．任意の $b \in \mathbb{K}^n$ について，対応する $a \in V$ を作ってみせればよい．

□**定義 11.2 (合成写像)** 2 つの写像 $A \xrightarrow{T} B \xrightarrow{S} C$ から新たな写像 $A \xrightarrow{S\circ T} C$ を

$$(S\circ T)(a) := S(T(a)) \quad \text{for } \forall a \in A$$

のように定めるとき，写像 $S\circ T$ を，S と T の**合成写像**という．

Exercise 11.2 $T \in \mathcal{L}(U,V),\ S \in \mathcal{L}(V,W) \implies S\circ T \in \mathcal{L}(U,W)$ を示せ．

□**定義 11.3 (恒等写像と逆写像)** 写像 $I : A \to A$ が**恒等写像**であるとは，

$$I(a) = a \quad \text{for } \forall a \in A,$$

この I を id_A とも記す．写像 $A \xrightarrow{T} B$ が**可逆**であるとは，写像 $B \xrightarrow{S} A$,

$$S\circ T = \mathrm{id}_A \ \text{ and } \ T\circ S = \mathrm{id}_B$$

が存在することをいう．S を T の**逆写像**といい $S = T^{-1}$ と記す．

■**補題 11.1** 写像 $T : A \to B$ について，T は可逆 $\overset{\text{必要十分}}{\iff}$ T は全単射．

Example 11.1 示せ．

▶ **解答例** $T : A \to B$ は可逆とする．このとき写像 $S : B \to A$ が存在して，$S\circ T = \mathrm{id}_A$，$T\circ S = \mathrm{id}_B$ となる．各 $b \in B$ に対して $a := S(b) \in A$ を作ると，この a は $T(a) = T\big(S(b)\big) = b$ を満足する．ゆえに $\forall b \in B, \exists a \in A$ s.t. $b = T(a)$ なので T は全射．次に $a_1, a_2 \in A$ に対して，$T(a_1) = T(a_2) \implies a_1 = S\big(T(a_1)\big) = S\big(T(a_2)\big) = a_2$ より T は単射．逆に，$T : A \to B$ が全単射ならば，各 $b \in B$ に対して $b = T(a)$ となる $a \in A$ が一意に存在する．これを使って $S : B \to A$ のルールを $a = S(b)$ と定めると，$b = T(a) = T\big(S(b)\big)$，$a = S(b) = S\big(T(a)\big)$ となるから T は可逆となる．

Exercise 11.3 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ が可逆 $\implies T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ を示せ．

▶ **ヒント** 逆写像の定義より，$T \in \mathcal{L}(V,V)$ が可逆ならば，

$$T\circ T^{-1} = \mathrm{id}_W, \quad T^{-1}\circ T = \mathrm{id}_V$$

となる写像 $T^{-1} : W \to V$ が存在する．任意の $v_1, v_2 \in V$ をとると，

$$\begin{aligned}
v_1 + v_2 &= \mathrm{id}_V(v_1) + \mathrm{id}_V(v_2) && \text{恒等写像}\\
&= T^{-1}\big(T(v_1)\big) + T^{-1}\big(T(v_2)\big) && \text{逆写像}\\
v_1 + v_2 &= \mathrm{id}_V(v_1 + v_2) && \text{恒等写像}\\
&= T^{-1}\big(T(v_1 + v_2)\big) && \text{逆写像}\\
&= T^{-1}\big(T(v_1) + T(v_2)\big) && T \text{ は線形写像}
\end{aligned}$$

より，したがって，

$$T^{-1}\big(T(v_1)\big) + T^{-1}\big(T(v_2)\big) = T^{-1}\big(T(v_1) + T(v_2)\big) \quad \text{for } \forall v_1, \forall v_2 \in V$$

が判明する．これから，どうにかして

$$T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_1 + w_2) \quad \text{for } \forall w_1, \forall w_2 \in W$$

が帰結できればよい．ヒントは，T は全単射．同様にしてスカラー倍も示せ．

□定義 11.4 (線形同型)　V，W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．V から W への可逆な線形写像 $T : V \to W$ が作れるとき，V，W は**線形同型**もしくは単に**同型**であるという．可逆な線形写像 T を線形同型写像という．

ここで線形同型とは，線形空間としての構造が同じという意味である．なぜなら，

(1) T は全単射より，V の元と W の元は 1 対 1 に対応する．

$$v \in V \overset{1\text{ 対 }1}{\longleftrightarrow} w = T(v) \in W$$

(2) T は線形写像より，V の線形演算の像は W の線形演算となる．

$$v_1 + v_2 \xrightarrow{T} T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

(3) T の可逆性により逆写像 T^{-1} が存在し，Exercise 11.3 により T^{-1} もまた線形写像だから，W の線形演算の像は V の線形演算になる．

(4) その結果，V の基底の像は W の基底を定め，その逆も成立する．

などなど，片方を定めれば自動的に他方が連動し，両者は同じ線形構造をもつ．

以上の定義により，Exercise 10.1 と Exercise 11.1 は次の定理として整理できる．

■定理 11.2 (座標写像の性質)　座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ は線形同型写像であり，したがって V と $\mathbb{K}^n$ は互いに同型な線形空間となる．

この定理により，抽象線形空間 V での議論は，これと同型な数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ での議論にいつでも落せることになる．V に順序基底 $\mathcal{B}$ を定め，座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ を導入すればば直ちにそうなる．

12

行列表示

ベクトルの成分表示をまねて，線形写像を成分表示する方法を考える．良く知られているように，数ベクトルから数ベクトルへの線形写像 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ のルールは，行列 A を用いて

$$T : x \mapsto y = Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m)$$

と書ける．成分で書けば，

$$T : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である．ここで入力 x と出力 y のみが既知であるとき，行列 A の成分を推定する問題を考えよう．

Exercise 12.1 (変換行列の推定)　入力 x に対する出力 y は自由に調べられるとする．どんな入力をいくつ用意すれば，行列 A の成分が最も簡単に判明するか考えよ．

□定義 12.1 ($\mathbb{R}^n$ の標準基底)

$$\boldsymbol{e}_1^{(n)} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2^{(n)} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n^{(n)} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

を $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という．

■補題 12.1 (列ベクトル)　$A = [\alpha_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}$ の各列を，$\mathbb{R}^m$ の縦ベクトル，

$$a_1 := \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix},\ a_2 := \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix},\ \cdots,\ a_n := \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

と見なし，これらを A の**列ベクトル** (column vector) と呼び，$A = [a_1, \cdots, a_n]$ と書く．このとき，$A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ と $x = [\xi_i] \in \mathbb{R}^n$ の積は，

$$Ax = [a_1, a_2, \cdots, a_n][\xi_i] = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n$$

のように，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ を係数とする $a_1, \cdots, a_n$ の線形結合で書ける．

■定理 12.2 ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ の行列表示)　i) 線形写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の変換則は，行列

$$[T] := \left[T(\boldsymbol{e}_1^{(n)}), T(\boldsymbol{e}_2^{(n)}), \cdots, T(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right] \in \mathrm{M}_{m\times n}$$

で $T(x) = [T]x$，$x \in \mathbb{R}^n$ と書ける．ii) 逆に，行列 A で $T(x) = Ax$ と書ける変換則 T は線形写像である．$[T]$ を T の**行列表示** (matrix representation) という．

Exercise 12.2　定理 12.2 を証明せよ．(ヒント：ii) は補題 12.1 を利用する)

以上と全く同じ発想で，一般の線形写像 $T : V \to W$ の行列表示を考えることができる．V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし，$\dim V = n$，$\dim W = m$ とする．V の順序基底 $\mathcal{B} := \left\langle b_1, \cdots, b_n \right\rangle$ と，W の順序基底 $\mathcal{C} := \left\langle c_1, \cdots, c_m \right\rangle$ を選んで固定する．

少々議論が込み入るので**可換図式**を用いると，上の定義は次のように図式化できる．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

線形写像 T は V の元を W の元に写し，その一方で，座標写像 $\varphi_{\mathcal{B}}$ は V の元を同型な $\mathbb{R}^n$ の元に落し，座標写像 $\varphi_{\mathcal{C}}$ は W の元を同型な $\mathbb{R}^m$ の元に落す．

第 1 のアイデアは，線形写像 $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の存在に気付くことである．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{T}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

可換図式をたどれば，$\tilde{T}$ は既知の写像を用いて

$$\tilde{T} := \varphi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

と書ける．T は線形写像，座標写像は線形同型写像より，右辺は全て線形写像となるので，その合成写像 $\tilde{T}$ もまた線形写像となる．したがって，$\tilde{T}$ は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像となり，定理 12.2 から直ちに，

$$[\tilde{T}] = \left[\tilde{T}(\boldsymbol{e}_1^{(n)}), \cdots, \tilde{T}(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right]$$

と行列表示される．この $[\tilde{T}]$ を T の行列表示と見なすのが第 2 のアイデアである．

□定義 12.2 (線形写像の行列表示)　V の順序基底 $\mathcal{B} := \left\langle b_1, \cdots, b_n \right\rangle$ と，W の順序基底 $\mathcal{C} := \left\langle c_1, \cdots, c_m \right\rangle$ を選んで固定する．このとき，$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ から得られる $m \times n$ 行列

$$\begin{aligned} [T] := [\tilde{T}] &= \left[\tilde{T}(\boldsymbol{e}_1^{(n)}), \cdots, \tilde{T}(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right] \\ &= \left[(\varphi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1})(\boldsymbol{e}_1^{(n)}), \cdots, (\varphi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1})(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right] \end{aligned}$$

を線形写像 $T : V \to W$ の**行列表示**と呼ぶ．このとき T と同型な $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の変換則は $\tilde{T}(x) = [T]x$ for $\forall x \in \mathbb{R}^n$，ないしは，$\varphi_{\mathcal{C}}\big(T(v)\big) = [T]\varphi_{\mathcal{B}}(v)$ for $\forall v \in V$ と書ける．

▶▶　V の基底 $b_1, \cdots, b_n$ は, $\mathbb{R}^n$ の標準基底で $b_i = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\boldsymbol{e}_i^{(n)})$ と書ける. ($\because \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\boldsymbol{e}_1^{(n)}) = 1b_1 + 0b_2 + \cdots + 0b_n = b_1$ 以下同)

この定義のアイデアの中核は，急がば回れの要領で，行列で変換則を書けない作用 $T : V \to W$ を，行列で変換則が書ける作用 $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に翻訳してしまったところにある．

Exercise 12.3　Exercise 10.2 p38 の線形写像 $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ を，順序基底 $\left\langle 1, x, x^2 \right\rangle$ で行列表示せよ．(まず，この行列表示を可換図式で表せ)

■命題 12.3 (逆写像の行列表示)　$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ が全単射ならば，逆写像 $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在する．このとき，逆写像 T^{-1} の行列表示

$$[T^{-1}] := [T^{-1}(e_1^{(n)}), \cdots, T^{-1}(e_n^{(n)})]$$

は，$[T]$ の逆行列に一致する．すなわち $[T^{-1}] = [T]^{-1}$．

Exercise 12.4　$n = 2$ について，$[T] = \left[\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right]$ とする．$[T^{-1}]$ を求めよ．

▶ **ヒント**　$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の行列表示は $[T^{-1}] = \left[T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right), T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right)\right]$. $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{smallmatrix}\right] \implies \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{smallmatrix}\right]\right) = T^{-1}\left(\alpha_{11}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \alpha_{21}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \alpha_{11}T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) + \alpha_{21}T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right)$．連立方程式.

基底を変更したときの座標の変化なども，可換図式を用いれば容易にとらえられる．例えば，次のような可換図式を作れば，

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{C}}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "S"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

n 次元実線形空間 V の基底を，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{C}$ に変更したときの座標変換 S は,

$$S = \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

であることが直ちに分かる．S は線形写像だから，定理 12.2 p46 により行列表示

$$[S] = \left[S(\boldsymbol{e}_1^{(n)}), S(\boldsymbol{e}_2^{(n)}), \cdots, S(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right]$$

が求まる．$[S]$ を基底変更に伴なう**座標変換行列**という．

直観の効きにくい 2 次多項式の空間 $\mathcal{P}_2$ で練習してみよう．

Exercise 12.5　$\mathcal{P}_2$ の基底を，(8.1) p34 のテイラー型基底 $\mathcal{B}$ から，(8.2) p34 のラグランジュ補間基底 Λ に変更したときの座標変換行列 $[S]$ を求めよ．

▶ **ヒント**　可換図式により座標変換 S を求め，その行列表示 $[S]$ を求めればよい．試しに行列表示の一列目は，$\varphi_{\mathcal{B}}(1) = \varphi_{\mathcal{B}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から逆算して $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$ となるから，$\varphi_{\Lambda} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi_{\Lambda}(1)$ が判明する．最後に，$1 = \xi_0 L_0(x) + \xi_1 L_1(x) + \xi_2 L_2(x)$ を作り，順次 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ を代入して (8.3) p34 を使うと，$1 = \xi_0, 1 = \xi_1, 1 = \xi_2$ より，

$$\varphi_{\Lambda} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi_{\Lambda}(1) = \varphi_{\Lambda}(1 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が得られる．同様に 2 列目，3 列目を計算せよ．

最後に，力学の計算に大変便利な座標写像の公式を導いておこう．この公式を使うと，通常の言葉による暗算？では脳味噌がよじれるような座標変換の状況を，単刀直入に数式表現できる．

■命題 12.4 (座標写像の公式)　$\mathcal{B} := \left\langle b_1, \cdots, b_n \right\rangle$ を V の基底とする．可逆な線形変換 $R : V \to V$ と，その座標空間における表現 $\tilde{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{R}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

のようにとると，R の $\mathcal{B}$ による行列表示は $[R] := [\tilde{R}]$ となる．

この $R : V \to V$ を用いて，基底 $\mathcal{B}$ を，$R(\mathcal{B}) := \left\langle R(b_1), \cdots, R(b_n) \right\rangle$ へ変更するとき，任意の $v \in V$ について次の公式が成立する．

(1) $\varphi_{R(\mathcal{B})} \circ R = \varphi_{\mathcal{B}}$.　(写像の相等: $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{R(\mathcal{B})} \circ R(v) = \varphi_{\mathcal{B}}(v)$ for $\forall v \in V$)

(2) $\varphi_{R(\mathcal{B})} = \tilde{R}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}$.　(写像の相等: $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{R(\mathcal{B})}(v) = \tilde{R}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(v)$ for $\forall v \in V$)
ゆえに座標変換は，$\varphi_{R(\mathcal{B})}(v) = \tilde{R}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}(v) = [R]^{-1} \varphi_{\mathcal{B}}(v)$.

Exercise 12.6　公式 (1) を証明せよ．

Exercise 12.7　公式 (2) を証明せよ．

▶ **ヒント**　公式 (1) の可換図式は $\begin{tikzcd} V \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[dl, "\varphi_{R(\mathcal{B})}"] \\ \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$ となるが，これと $\begin{tikzcd} V \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{R}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$ を合体させる．

13

疑似逆行列

逆行列は，正方行列に対してしか作れない．例えば，10 章最後の連立方程式の例では，未知数と方程式の数が合わないため，逆行列をかけて解く方法は使えなかった．ところが解は存在した．

□**定義 13.1 (線形方程式)**　線形空間 V, W 上の線形写像 $T : V \to W$ を考える．このとき，未知ベクトル $v \in V$ と定ベクトル $w_0 \in W$ の関係式,

$$T(v) = w_0 \tag{13.1}$$

を，**線形方程式** (linear equation) という．

□**定義 13.2 (解空間)**　線形方程式を満足する $v \in V$ の集合

$$T^{-1}(\{w_0\}) \quad \neq \varnothing \tag{13.2}$$

を，**解空間** (solution space) という．$T^{-1}(\{w_0\})$ は V の線形部分空間となるが，線形部分空間 $T^{-1}(\{w_0\})$ を求めることを「線形方程式を解く」という．

■**定理 13.1 (線形方程式の解)**　線形方程式 $T(v) = w_0$ を満足する任意の $v = v_0$ を，**特殊解**という．このとき，線形方程式の**一般解**は，次のように書ける．

$$T^{-1}(\{w_0\}) = v_0 + \ker T := \{\, v_0 + v \mid v \in \ker T \,\} \tag{13.3}$$

10 章の最後の例の解も，確かに,

$$x = \underbrace{\overbrace{\eta_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\text{特殊解}} + \xi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \forall \xi \in R}_{\text{一般解}} \tag{13.4}$$

の形式で得られている．

Exercise 13.1　定理 13.1 を証明せよ．

▶ **ヒント**　定理の主張 $T^{-1}(\{w_0\}) = \{\, v_0 + v \mid v \in \ker T \,\}$ は集合の相等であるから，$u \in T^{-1}(\{w_0\}) \iff u \in \{\, v_0 + v \mid v \in \ker T \,\}$ を示せばよい．まず，任意の $u \in T^{-1}(\{w_0\})$ をとると，同値変形 p14 $T(u) \in \{w_0\}$ が成立するが，これは $T(u) = w_0$ を意味するので，u は特殊解 v_0 の 1 つである．$\ker T$ は V の線形部分空間なので，$\mathbb{O}_V \in \ker T$ より，$u = v_0 = v_0 + \mathbb{O}_V \in \{\, v_0 + v \mid v \in \ker T \,\}$ が示される．

次に，任意の $u = \{\, v_0 + v \mid v \in \ker T \,\}$ をとる．これは

$$u = v_0 + v, \quad \forall v \in \ker T$$

と書ける．これから $u \in T^{-1}(\{w_0\})$ を示せばよい．

■**定理 13.2 (可解条件)**　線形方程式 $T(v) = w_0$ が解を持つ必要十分条件は，$w_0 \in \mathrm{im}T$ である．

▶ **証明**　像の定義より，$w_0 \in \mathrm{im}T = T(V) \iff \exists x \in V : T(x) = w_0$ である．

次に，可解条件の行列表示を考える．

■**補題 13.3 (行列の像空間)**　$A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ の列ベクトルを $a_1, \cdots, a_n$ と書く．また，$T(x) := Ax$ に対して，$\mathrm{im}T = \mathrm{im}A$ と書く．このとき，

$$\mathrm{im}A = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$$

▶ **証明**　A の列ベクトル $a_1, \cdots, a_n$ を使って，$A = [a_1, \cdots, a_n]$ と書く．このとき，行列 A の作用は，$x = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^T$ に対して，$Ax = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$ と書ける．これより，A の像空間は

$$\mathrm{im}A = \{\, Ax \mid x \in \mathbb{R}^n \,\} = \{\, \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \mid \xi_i \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$$

■**定理 13.4 (可解条件の行列表示)**　線形方程式

$$Ax = y_0, \quad A \in \mathrm{M}_{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ y_0 \in \mathbb{R}^m$$

が解をもつ必要十分条件は，$\mathrm{rank}[A, y_0] = \mathrm{rank}A$ である．

▶▶　$[A, y_0] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \eta_m \end{bmatrix}$

▶ **証明**　補題より，可解条件は $y_0 \in \mathrm{im}A = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$ と書ける．まず，可解条件 $y_0 \in \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$ を仮定すると，y_0 は $a_1, \cdots, a_n$ の線形結合となるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{im}A &= \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\} = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n, y_0\} \\ &= \{\, \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n + \alpha y_0 \mid \xi_i, \alpha \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, [A, y_0][\xi_1, \cdots, \xi_n, \alpha]^T \mid \xi_i, \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{im}[A, y_0] \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに，$\mathrm{rank}A = \dim\, \mathrm{im}A = \dim\, \mathrm{im}[A, y_0] = \mathrm{rank}[A, y_0]$ を得る．逆に $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A, y_0]$ を仮定すると，y_0 は張る次元を増やさないから，$a_1, \cdots, a_n$ と従属なベクトルとなり，可解条件 $y_0 \in \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\}$ が得られる．

以上に見たように，線形方程式 $T(v) = w_0$ の解は，必ずしも V の 1 点にはならない．1 点になるのは，T が全単射の場合，すなわち可逆の場合のみである．T が全単射でなければ，解は V の部分空間 (幾何学的には，直線，平面，超平面) となる．

しかし，実用的な数値計算を組むときに，このような多次元の解空間は扱いづらい．そこで，解空間の 1 点を代表解として選び出す逆行列のようなものが発明されている．これを**疑似逆行列**という．

□**定義 13.3 (疑似逆行列)**　数ベクトル空間上の全単射でない線形写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と，その行列表示 $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ を考える．このとき，

(1) $AA^+A = A$.

(2) $A^+AA^+ = A^+$

(3) $(AA^+)^T = AA^+$

(4) $(A^+A)^T = A^+A$

を満足する行列 $A^+\mathrm{M}_{n\times m}$ が唯一定まる．これを，(ムーア-ペンローズの) **疑似逆行列** (pseudo inverse) または**一般化逆行列**という．

■**定理 13.5 (疑似逆行列の性質)**　$A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ について，

(1) 正方 $m = n$ かつ可逆のとき，$A^+ = A^{-1}$．(通常の逆行列)

(2) 列ベクトル ($\in \mathbb{R}^n$) が線形独立のとき，$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.
　このとき，$A^+A = E_n$ ($n \times n$ 単位行列).

(3) 行ベクトル ($\in \mathbb{R}^m$) が線形独立のとき，$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.
　このとき，$AA^+ = E_m$ ($m \times m$ 単位行列).

例えば，10 章の最後の例については，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{に対して} \quad A^+ = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

が求まる．この A^+ を左から $Ax = y_0$ の両辺に乗じると，$A^+Ax = E_3x = x$ より，代表解 $x = A^+y_0 =$

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \eta_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{13.6}$$

が得られる．(13.4) p49 の一般解と比較すると，ξ を任意とする一般解から，$\xi = -\frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_2)$ の 1 点を選び出した結果であることが分かる．

14

内積空間

線形空間は長さや直交性の概念を持たない．これらを「内積」として一括導入する．

内積を付与した線形空間を一般に，**内積空間** (inner product space) という [1)]．線形演算しかない線形空間に，内積 (inner product) という乗法を置くと何が起こるのか？ — 長さと直交性の統一理論が構成できるのだが，具体例から始めよう．

□定義 14.1 (標準内積)　$\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^n$ を考える．2 つの n 次元数ベクトル $x := [\xi_i]$, $y := [\eta_i] \in \mathbb{R}^n$ に対して，実数：

$$\langle x \,|\, y \rangle := \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j \in \mathbb{R}$$

を対応づける実数値写像 $\langle\,|\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$\mathbb{R}^n$ の**標準内積** (standard inner product) という [2)]．

■定理 14.1 (標準内積の性質)　$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ について，

(1) 双線形性：
$\langle \lambda x + \mu y \,|\, z \rangle = \lambda\langle x \,|\, z \rangle + \mu\langle y \,|\, z \rangle$，$\langle x \,|\, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda\langle x \,|\, y \rangle + \mu\langle x \,|\, z \rangle$.

(2) 対称性：$\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$.

(3) 正定値性：$\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$.　とくに $\langle x \,|\, x \rangle = 0 \iff x = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$.

一般に，2 変数関数 $f(x, y)$ がどちらの変数 x, y についても線形写像であるとき**双線形** (bilinear) であるという．

Exercise 14.1　定理 14.1 の (1)〜(3) を証明せよ。

▶ **ヒント**　(3) の後半にある $\langle x \,|\, x \rangle = 0 \implies x = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$ は，背理法で $x = [\xi_i] \neq \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$ を仮定すると矛盾が出せる [3)]．次のとどめを差せ.

---

1) あるいは計量ベクトル空間 (metric vector space) という.

2) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ については定義 2.5 p12 参照.

3) 「$\cdots$ s.t. 〜」は such that の短縮形で「〜であるような $\cdots$」という意味.

$$[\xi_i] \neq \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \iff 1 \leq \exists k \leq n \text{ s.t. } \xi_k \neq 0$$
$$\implies \langle x \,|\, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 > \xi_k^2$$

その他，残りの法則は全て計算問題.

以上に導入した標準内積の性質を，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の例で見てみよう．ただし $\mathbb{R}^3$ は内積空間であることに加えて，三平方の定理や余弦定理が成立するユークリッド空間でもあると仮定しよう．このとき，$x = [\xi_i] \in \mathbb{R}^3$ 自身の内積の平方根をとると，

$$|\,x\,| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

となり，これは，三平方の定理で決まる 3 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^3$ の長さに一致する．次に，$x, y \in \mathbb{R}^n$ を 2 辺とする三角形を考え，残りの辺の長さ $|\,x - y\,|$ を調べる．まず x, y のなす角度を θ とすると，余弦定理の帰結として，

$$|\,x - y\,|^2 = |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 - 2|\,x\,|\,|\,y\,| \cos\theta \tag{14.1}$$

が得られ，他方，定理 14.1 の内積の算法の帰結として，

$$\begin{aligned} |\,x - y\,|^2 &= \langle x - y \,|\, x - y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle - \langle y \,|\, x \rangle - \langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, y \rangle \\ &= |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 - 2\langle x \,|\, y \rangle \end{aligned} \tag{14.2}$$

となる．つまり，ユークリッド空間 (14.1) と内積空間 (14.2) が両立するには，

$$\langle x \,|\, y \rangle = |\,x\,|\,|\,y\,| \cos\theta \tag{14.3}$$

でなければならない．このとき x と y の直交は $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ と書ける．以上，$\mathbb{R}^3$ の標準内積を使うと，空間ベクトルの長さと直交性を一括して数量化できる．

以上の計算例をヒントに，内積の一般論を構成したい．そのために，定理 (■) だった法則 (1)〜(3) を，新たに公理 (□) と見なす．V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする．

□公理 14.2 (内積) (P1)〜(P3) を満足する実数値写像 $\langle\,|\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ を，**内積** (inner product) と呼ぶ．$\forall u, \forall v, \forall w \in V$，$\forall \lambda, \forall \mu \in \mathbb{R}$ について，

(P1) 双線形性：
$$\langle \lambda u + \mu v \,|\, w \rangle = \lambda \langle u \,|\, w \rangle + \mu \langle v \,|\, w \rangle, \quad \langle u \,|\, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u \,|\, v \rangle + \mu \langle u \,|\, w \rangle.$$
(P2) 対称性：$\langle u \,|\, v \rangle = \langle v \,|\, u \rangle$.
(P3) 正定値性： $\langle u \,|\, u \rangle \geq 0$.　とくに $\langle u \,|\, u \rangle = 0 \iff u = \mathbb{O}_V$.

例えば，連続関数 $[0, 1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ の全体集合 $\mathcal{C}$ は，定義 4.3 p19 の線形演算によって $\mathbb{R}$ 上の線形空間となるが，実数値写像 $\langle\,|\,\rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ s.t.

$$\langle f \,|\, g \rangle := \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{C}$$

は，$\mathcal{C}$ の内積の一例である (もちろん他にも作れる)．なぜなら，

$$\begin{aligned}\langle \lambda f+\mu g \,|\, h\rangle &= \int_0^1 (\lambda f+\mu g)(x)h(x)dx \\ &= \int_0^1 \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)h(x)dx \quad \square\text{定義 4.3 p19} \\ &= \lambda\int_0^1 f(x)h(x)dx+\mu\int_0^1 g(x)h(x)dx \quad \text{微積分学} \\ &= \lambda\langle f \,|\, h\rangle+\mu\langle g \,|\, h\rangle\end{aligned}$$

などから双線形性 (P1) が示され，同様の計算から，対称性 (P2) と正定値性 (P3) の「 $\Longleftarrow$ 」までが示される．ただし，(P3) の「$\Longrightarrow$」を示すには，若干の解析学が必要である．対偶：$f \neq \mathbb{O}_{\mathcal{C}} \implies \langle f \,|\, f\rangle \neq 0$ を示す．まず，

$$f \neq \mathbb{O}_{\mathcal{C}} \iff \exists x_0 \in [0,1] \text{ s.t. } f(x_0) \neq 0$$

であるが，連続関数の 2 乗もまた連続関数なので，$f(x_0) \neq 0 \implies (f(x_0))^2 > 0$ の近所に必ず $(f(x'))^2 > 0$ for $\forall x' \in I$ となる小区間 I がとれる．区間 I 上で積分値は 0 になれず，$(f(x))^2 \leq 0$ より，これと相殺する区間もありえないから，$\langle f \,|\, f\rangle \neq 0$ を得る．以上，(P1)〜(P3) を全て満足したから内積である．

□定義 14.3 (内積が導くノルム)　内積 $V \times V \xrightarrow{\langle\,|\,\rangle} \mathbb{R}$ から定まる実数値写像 $V \xrightarrow{|\,|} \mathbb{R}$,

$$|\,v\,| := \sqrt{\langle v \,|\, v\rangle}, \quad v \in V$$

を，内積 $\langle\,|\,\rangle$ によって導かれる**ノルム** (norm) という．

►► $|\,v\,| := \sqrt{\langle v \,|\, v\rangle}$ は次の性質を持つ．$\forall v, \forall w \in V$，$\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

- 正定値性： $|\,v\,| \geq 0$．とくに $|\,v\,| = 0 \iff v = \mathbb{O}_V$.
- 斉次性： $|\,\lambda v\,| = |\lambda|\,|\,v\,|$.
- 三角不等式： $|\,v+w\,| \leq |\,v\,| + |\,w\,|$.

この 3 条件は「ノルムの公理」と見なされる．内積と無関係なノルムとして，例えば $|\,x\,|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} \xi_i$，$x = [\xi_i] \in \mathbb{R}^n$ が 3 条件を満たす.

Exercise 14.2　$\mathbb{R}^n$ の標準内積からノルムを導け．このノルムを**ユークリッドノルム** (Euclidean norm) という．

□定義 14.4 (直交性)　$u, v \in V$ が直交する $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\langle u \,|\, v\rangle = 0$．$u \perp v$ と書く．

Exercise 14.3 (零元との内積)　$x = \mathbb{O}_V \iff \langle x \,|\, v\rangle = 0$ for $\forall v \in V$ を示せ．

► **ヒント**　「$\Longrightarrow$」は $x = \mathbb{O}_V = 0v$ を使う.「 $\Longleftarrow$ 」は対偶：$x \neq \mathbb{O}_V \implies \exists v \in V$ s.t. $\langle x \,|\, v\rangle \neq 0$ を示すのが簡単である．実際に $\langle x \,|\, v\rangle \neq 0$ となる $v \in V$ が作れたら証明完了.

□**定義 14.5 (正規直交基底)**　V の基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ が，**正規直交基底** (orthonormal basis) であるとは，

$$\langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j. \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

であることをいう．δ_{ij} をクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という．

ようするに，ノルムが $|u_i| = 1$ で，互いに直交 $\langle u_i \mid u_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ するようなベクトルからなる基底を正規直交基底という．例えば，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\mathcal{E} := \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を定義 14.1 p52 の標準内積で測れば正規直交基底と判定される．むろん，同じ $\mathcal{E}$ を他の内積で測れば正規直交の判定はくつがえる．

Exercise 14.4 (座標関数の内積表示)　$\mathcal{E} = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ が V の正規直交基底ならば，$v \in V$ の u_i 方向への射影の係数 $\lambda_i = \langle v \mid u_i \rangle$ は，座標関数 $\varphi_{\mathcal{E}}$ の「内積による別表記」を与える．すなわち，

$$\varphi_{\mathcal{E}}(v) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v \mid u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v \mid u_n \rangle \end{bmatrix}.$$

が成立する．これを示せ．

▶▶　基底が正規直交でないと成立しない．

Exercise 14.5 (内積の値)　$\mathcal{E}$ が V の正規直交基底ならば，

$$\langle v \mid w \rangle = \langle \varphi_{\mathcal{E}}(v) \mid \varphi_{\mathcal{E}}(w) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j \qquad \text{for } \forall v, \forall w \in V$$

が成立する．すなわち，内積の値は，正規直交座標の標準内積の値に一致する．

▶ **ヒント**　$\mathcal{E} = \langle u_1, \cdots, u_2 \rangle$ を V の正規直交基底とすると，$v, w \in V$ は

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} \eta_j u_j$$

と書ける．これから $\langle v \mid w \rangle$ を計算し，$\mathcal{E}$ の正規性と直交性を用いる．

ちなみに，正規直交でない基底 $\langle b_1, \cdots, b_n \rangle$ で内積 $\langle v \mid w \rangle$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\langle v \,|\, w \rangle &= \langle (\xi_1 b_1 + \cdots + \xi_n b_n) \,|\, (\eta_1 b_1 + \cdots + \eta_n b_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \langle b_i \,|\, b_j \rangle \\
&= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad \gamma_{ij} := \langle b_i \,|\, b_j \rangle
\end{aligned}
$$

となる．$[\gamma_{ij}] := [\langle b_i, b_j \rangle] \in \mathrm{M}_{n\times n}$ を**計量テンソル** (metric tensor) という．

計量テンソルの対角要素は長さの不揃いを表わし，非対角要素は正規直交でない基底の傾き具合を表す．特別な場合として，基底 $\left\langle b_1, b_2, \cdots, b_n \right\rangle$ が正規直交基底のときは，計量テンソル $[\gamma_{ij}]$ は単位行列になるので，内積の値を標準内積で書けたわけだ．以上を踏まえて，内積から導かれるノルムの 2 乗を，正規直交でない基底で成分表示すると，

$$
|\, v \,|^2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \gamma_{ij} := \langle b_i \,|\, b_j \rangle
$$

が得られるが，これを **2 次形式** (quadratic form) と呼び，応用上は，最適制御理論などに現われる．

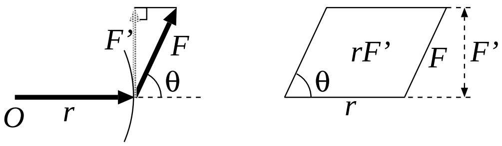
2 次形式の平方根 $|\, v \,|$ はノルムの公理を満足するので，2 次形式とは，正規直交でない基底で計算した「長さ」のようなものである．

15

符号付き面積

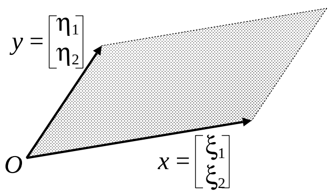
向きを定めた平行四辺形の面積を，座標成分で書き下すと**行列式**が得られる．

物理や工学の特性量には，図形的に平行四辺形の面積であるものが少なくない．例えば，原点 O から r だけ離れた点に力 F が作用するとき，原点を回そうとする作用 (**トルク** (torque) という) の大きさ S は，動径 r と，F の回転方向成分 F' の積 $S = rF'$ になる．



$F' = F \sin\theta$ だから $S = rF' = rF\sin\theta$ と書けるが，これは r, F を 2 辺とする平行四辺形の面積である．以下，r, F が数ベクトルのときの面積の計算法を考える．

$x, y \in \mathbb{R}^2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を $D(x, y)$ と表記する．



冒頭でも示したユークリッド空間の性質 $D(x, y) = |\,x\,|\,|\,y\,|\sin\theta$ を認めておく．

Exercise 15.1　$D(x, y)$ の値を，$x := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$，$y := \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$ の成分で書き下せ [1]．

$D(x, y) = |\,x\,|\,|\,y\,|\sin\theta$ の符号は，$\sin\theta$ に依存する．ゆえに，x, y の順番を変えると回転角 θ が反転して $D(y, x)$ の正負も反転するから，$D(x, y) = -D(y, x)$ が成立する．このような符号付きで測られた面積のことを，**符号付き面積** (signed area) という．図 15.1 に示すような $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ を 3 辺とする六角形の面積を考えると，図より $D(x, y) + D(x, z) + D(y, z) = 2 \cdot \frac{1}{2} D(x, y) + D(x + y, z)$ ゆえ，$D(x, z) + D(y, z) = D(x + y, z)$ が成立する．以上の考察から次の公理を抽出する．

---

[1] $|\,x\,|\,|\,y\,|\cos\theta$ を成分で書くと $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$，$|\,x\,|\,|\,y\,|\sin\theta$ を成分で書くと $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$．

□**公理 15.1 (符号付き面積)**　$x, y, z \in \mathbb{R}^2$ とする．$D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が

(1) 双線形性 (2 重線形性)：

$$D(\lambda x + \mu y, z) = \lambda D(x, z) + \mu D(y, z),\ D(x, \lambda y + \mu z) = \lambda D(x, y) + \mu D(x, z).$$

(2) 歪対称性 (わいたいしょうせい)： $D(x, y) = -D(y, x)$.　ゆえに $D(x, x) = 0$.

(3) 単位面積： 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ について，$D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

の性質を持つとき，**符号付き面積**と呼ぶ.

符号付き面積 $D(x, y)$ は，$\left|\begin{smallmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{smallmatrix}\right|$ と書くとき，行列 $\left[\begin{smallmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_1 & \eta_2 \end{smallmatrix}\right]$ の**行列式** (determinant) といわれる．例えば，D の歪対称性より列の交換について $\left|\begin{smallmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_1 & \eta_2 \end{smallmatrix}\right| = -\left|\begin{smallmatrix} \eta_1 & \xi_1 \\ \eta_1 & \xi_2 \end{smallmatrix}\right|$ が成立する．また $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ の値は，行列を転置しても変化しない.

Exercise 15.2　$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ を，標準基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ で $v_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{e}_2$，$v_2 = \alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2$ と書く．公理 15.1 p58 から，$D(v_1, v_2) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ を導け.

▶ **ヒント**　D の双線形性で展開し，$\mathcal{E}$ の正規直交性で整理する.

次元を上げて，$x, y, z \in \mathbb{R}^3$ を 3 辺とする平行六面体の体積 $D(x, y, z)$ を考える.

□**公理 15.2 (符号付き体積)**　$x_1, x_2, x_3, x, y \in \mathbb{R}^3$ とする．$D : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が

(1) 3 重線形性：

$$D(\lambda x + \mu y, x_2, x_3) = \lambda D(x, x_2, x_3) + \mu D(y, x_2, x_3),$$

$$D(x_1, \lambda x + \mu y, x_3) = \lambda D(x_1, x, x_3) + \mu D(x_1, y, x_3),$$

$$D(x_1, x_2, \lambda x + \mu y) = \lambda D(x_1, x_2, x) + \mu D(x_1, x_2, y).$$

(2) 歪対称性 (任意の 2 つを入れ替えると符号が反転)：

$$D(x_1, x_2, x_3) = -D(x_2, x_1, x_3) = -D(x_1, x_3, x_2) = -D(x_3, x_2, x_1).$$

ゆえに $D(x, x, y) = D(x, y, y) = D(x, y, x) = 0$.

(3) 単位体積： 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ について，$D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$.

の性質を持つとき，**符号付き体積** (signed volume) という.

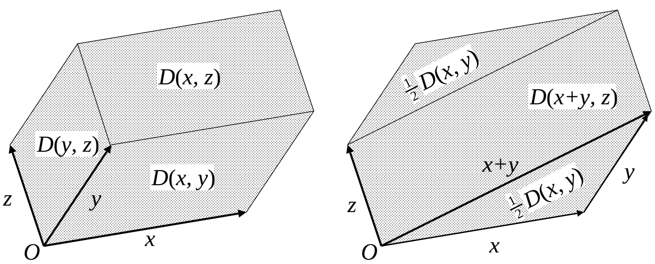


図 15.1　符号付き面積の双線形性

Exercise 15.3　$x_1, x_2, x_3 \in V$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E} = \left\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \right\rangle$ で,

$$x_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \boldsymbol{e}_i,\ x_2 = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j2} \boldsymbol{e}_j,\ x_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{k3} \boldsymbol{e}_k$$

と書く．平行六面体の体積

$$D(x_1, x_2, x_3) = D\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

の値を座標成分で書き下せ．公理 15.2 p58 だけから求める．

全く同様にして，$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n$ に対する n **次元符号付き体積** $D(x_1, \cdots, x_n)$ が定義できる．すなわち，(1) $D(x_1, \cdots, x_n)$ は n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ のどれについても線形写像，(2) 任意の 2 変数の場所を交換すると正負が反転，(3) 正規直交基底について $D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$，であると定義すればよい．$n$ 次元符号付き体積は，n 次行列 $[x_1, \cdots, x_n]$ の行列式を与える．(詳細は 16 章参照)

16

行列式

「行列の積」の行列式は,「行列の行列式」の積に一致する．証明できたら目標達成！

□定義 16.1 (行列式)　$n \times n$ 行列 $A = [\alpha_{ij}]$ を列ベクトル:

$$a_1 := \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}, \quad a_2 := \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad a_n := \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

によって $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ と書くとき, n 次元符号付き体積 $D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を A の**行列式**と呼び, $|A|$ または $\det A$ と書く．すなわち $|A| = \det A := D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

■定理 16.1 (行列式の性質)　$n \times n$ 行列 A, B の行列式 $|A|, |B|$ について,

1) A のある列を $\lambda \in \mathbb{R}$ 倍すると，$|A|$ も λ 倍される.
2) A の 2 つの列を交換すると，$|A|$ の正負は反転する.
3) A の 2 つの列が等しければ，$|A| = 0$.
4) A のある列を $\lambda \in \mathbb{R}$ 倍したものを他の列に足しても，$|A|$ の値は変らない.
5) $|AB| = |A|\,|B|$.
6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
7) $A = [\alpha_{ij}]$ の転置行列 $A^T := [\alpha_{ji}]$ について，$|A^T| = |A|$.

Exercise 16.1　4) を $n = 3$ について示せ．公理 15.2 を用いる.

1)〜3) は公理 15.2 の符号付き体積そのものの性質であり，4) も同様に示せる．これに対して，5) を示すには若干の手間を要するが，以下にその方法を述べる.

手始めに，さきほどは言葉で定義してしまった n 次元符号付き体積 p59 を何とかしよう．初めから数式で書けばよかったが，n 次元は変数が多いので，$n = 2, 3$ のときのように定義を列挙する方法が使えない．特に歪対称性が書きにくいわけだが，これを解消するために，**対称群** (symmetry group) という技法を導入しよう.

Exercise 15.3 の計算を復習すると,

$$\begin{aligned}
D(x_1,x_2,x_3) &= D\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_{i1}\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{3}\alpha_{i2}\boldsymbol{e}_j,\ \sum_{k=1}^{3}\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\alpha_{i1}D\left(\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{3}\alpha_{i2}\boldsymbol{e}_j,\ \sum_{k=1}^{3}\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_k\right) \quad \text{3 重線形性} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\alpha_{i1}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{i2}D\left(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j,\ \sum_{k=1}^{3}\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_k\right) \quad \text{3 重線形性} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\alpha_{i1}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{i2}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{i3}D\left(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{e}_k\right) \quad \text{3 重線形性} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}D(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)
\end{aligned}$$

のように 3 重和が出てくるが，この 3 重和は (i,j,k) の全ての組み合せにわたる和であり，図形的には $3\times3\times3$ の立方格子 (ジャングルジム) の全ての格子点：

$$(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),$$

$$(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),$$

$$(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)$$

にわたる和を意味している．ここで，符号付き体積の歪対称性により同じ添字が表われる体積 $D(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)$ は 0 になるから，該当するものを上から除くと，

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$$

だけが残る．これらは，$(1,2,3)$ から作れる順列の全てと見なせる．そこで，$(1,2,3)$ から上の 1 つを作る規則を σ とすると，これは全単射 $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ を定める．この全単射を**置換** (permutation) という．6 通りある $(1,2,3)$ の置換を，

$$\sigma_1 := \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right),\ \sigma_2 := \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right),\ \cdots,\ \sigma_6 := \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$$

と表記すれば (上段の組を下段の組に変換する)，全ての組合せは

$$\big(\sigma_1(1),\sigma_1(2),\sigma_1(3)\big),\ \big(\sigma_2(1),\sigma_2(2),\sigma_2(3)\big),\ \big(\sigma_3(1),\sigma_3(2),\sigma_3(3)\big),$$

$$\big(\sigma_4(1),\sigma_4(2),\sigma_4(3)\big),\ \big(\sigma_5(1),\sigma_5(2),\sigma_5(3)\big),\ \big(\sigma_6(1),\sigma_6(2),\sigma_6(3)\big)$$

と書ける．このとき，置換の全体集合：$\mathfrak{S}_3 := \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$ を **3 次対称群**と呼ぶ．同様にして，$(1,2,\cdots,n)$ から全ての順列を生成する全単射の全体集合として **n 次対称群** $\mathfrak{S}_n$ が定義される．

以上，$\mathfrak{S}_3$ を用いると，$D(x_1,x_2,x_3)$ の展開に表われた 3 重和は，過不足なく，

$$D(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}D(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma(3)}) \tag{16.1}$$

という和で書ける．この和から D を消去するために，置換の符号を定義する．

□**定義 16.2 (置換の符号)**　$(1,2,\cdots,n)$ の 2 要素の入れ換えを**互換**といい，任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ は互換の組合せで書ける．$(1,2,\cdots,n)$ から $\big(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\big)$ を得るのに要した互換の回数を r とするとき，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^r$$

で定まる符号を，置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の**符号**という．

■**補題 16.2**　$\mathfrak{S}$ を n 次対称群とし，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ を置換 $\sigma\in\mathfrak{S}$ の符号とする．このとき，n 次元符号付き体積の歪対称性は，

$$D(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\cdots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})=\mathrm{sgn}(\sigma)D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

と表記できる．

以上の対称群を利用して行列式を展開し尽くせば，最終目標の積公式が見えてくる．さっそく置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を用いると，3 次行列式 (16.1) はさらに，

$$\begin{aligned}D(x_1,x_2,x_3)&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}D(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma(3)})\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\,\mathrm{sgn}(\sigma)D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\quad\text{歪対称性}\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\quad\text{単位体積}\end{aligned}\tag{16.2}$$

まで整理できる．同様にして，n 次行列式 $D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は，

$$\begin{aligned}D(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=D\left(\sum_{k_1=1}^n\alpha_{k_1 1}\boldsymbol{e}_{k_1},\sum_{k_2=1}^n\alpha_{k_2 2}\boldsymbol{e}_{k_2},\cdots,\sum_{k_n=1}^n\alpha_{k_n n}\boldsymbol{e}_{k_n}\right)\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}D(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\cdots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}\,\mathrm{sgn}(\sigma)D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}\end{aligned}\tag{16.3}$$

のように展開される．式 (16.3) を n 次行列式の**完全展開**という．

Exercise 16.2 (行列式の積公式)　定理 16.1 p60 の 5) を証明せよ．

▶ **ヒント**　n 次行列 A,B の列ベクトル $a_i,b_i\in\mathbb{R}^n$ を用いて，

$$A=[a_1,a_2,\cdots,a_n],\quad B=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$$

と書くと，A と B の行列としての積は，A と b_i の積によって，$AB=[Ab_1,Ab_2,\cdots,Ab_n]$ と書ける．b_i は，正規直交基底 $\mathcal{E}=\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ で $b_i=\sum_{k_i=1}^n\beta_{k_i i}\boldsymbol{e}_{k_i}$ と書けるから，

$$
\begin{aligned}
Ab_i &= A\Big(\sum_{k_i=1}^{n} \beta_{k_i i} \boldsymbol{e}_{k_i}\Big) = \sum_{k_i=1}^{n} \beta_{k_i i} A\Big(\boldsymbol{e}_{k_i}\Big) \quad A \text{ は線形写像} \\
&= \sum_{k_i=1}^{n} \beta_{k_i i} a_k \quad \because\ A\boldsymbol{e}_k = a_k
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
|AB| &= D(Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_n) \\
&= D\left(\sum_{k_1=1}^{n} \beta_{k_1 1} a_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} \beta_{k_2 2} a_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{n} \beta_{k_n n} a_{k_n}\right)
\end{aligned}
$$

と書けるが，これは，完全展開 (16.3) の $\{\boldsymbol{e}_i\}$ を $\{a_i\}$ に読み換えることで，同様に展開できる．ただし，$\{\boldsymbol{e}_i\}$ では $D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ だが，$\{a_i\}$ では $D(a_1, \cdots, a_n) = |A|$ である．

Exercise 16.3　5) から 6) を示せ．

▶ **ヒント**　$AA^{-1} = I$ (単位行列)．$|I| = D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ (単位体積)．

この性質 6) を使うと「抽象線形変換 $T : V \to V$ の行列式」という概念を正当化できる．結論からいうと，行列式の値は行列表示の基底の選び方によらない．V を $\mathbb{K}$ 上線形空間とし，V の 2 種類の基底 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ をとる．すると，1 つの線形変換 $T : V \to V$ に対して 2 種類の行列表示 $[\tilde{T}_{\mathcal{B}}]$，$[\tilde{T}_{\mathcal{C}}]$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "\tilde{T}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, "\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & & & \mathbb{R}^n \arrow[dd, "\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}"] \\
& V \arrow[ul, "\theta_{\mathcal{B}}"'] \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "\theta_{\mathcal{C}}"] & V \arrow[ur, "\theta_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\theta_{\mathcal{C}}"'] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "\tilde{T}_{\mathcal{C}}"] & & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

このとき，可換図式により

$$
\tilde{T}_{\mathcal{C}} = \Big(\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}\Big)^{-1} \circ \tilde{T}_{\mathcal{B}} \circ \Big(\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}\Big)
$$

が成立するが，そもそも行列の積とは，合成写像の行列表示のことであるから，

$$
[\tilde{T}_{\mathcal{C}}] = [\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]^{-1} [\tilde{T}_{\mathcal{B}}] [\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]
$$

が判明する．ここで，両辺の行列式をとると (det と書く)，

$$
\begin{aligned}
\det[\tilde{T}_{\mathcal{C}}] &= \det\Big([\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]^{-1}\Big) \det[\tilde{T}_{\mathcal{B}}] \det[\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}] \quad \text{定理 16.1 p60 5)} \\
&= \Big(\det[\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]\Big)^{-1} \det[\tilde{T}_{\mathcal{B}}] \det[\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}] \quad \text{同じく 6)} \\
&= \frac{\det[\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]}{\det[\theta_{\mathcal{C}} \circ \theta_{\mathcal{B}}^{-1}]} \det[\tilde{T}_{\mathcal{B}}] = \det[\tilde{T}_{\mathcal{B}}]
\end{aligned}
$$

となる．したがって，線形変換 $T : V \to V$ の行列表示 $[T]$ の行列式 $\det[T]$ は，任意の基底に対して共通の値をとることが分かる．以上をまとめると，

■定理 16.3 (線形変換の行列式)　線形変換 $T : V \to V$ に対して，一意に，

$$\det T := \det[T]$$

が定まる．この $\det T$ を線形変換 $T : V \to V$ の行列式という．$[T]$ は T の任意の行列表示である．行列式 $\det T$ は基底変換における 1 つの不変量を与える．

Exercise 16.4　7) を示せ．

▶ **ヒント**　$\det A = \det[\alpha_{ij}] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}$ に対して，

$$\det A^T = \det[\alpha_{ji}] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$$

である．σ は全単射だから，逆写像が存在して $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1))$ と書けるので，

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}\left(\sigma(1)\right)\sigma(1)}\alpha_{\sigma^{-1}\left(\sigma(2)\right)\sigma(2)}\cdots\alpha_{\sigma^{-1}\left(\sigma(n)\right)\sigma(n)}$$

と書き直せるが，σ は全単射だから，$\sigma(1), \cdots, \sigma(n)$ は $1, \cdots, n$ のどれかである．各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ において，これらを昇順に並び換えると約束すると，

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}(1)1}\alpha_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots\alpha_{\sigma^{-1}(n)n}$$

と書ける．ここで，σ に要する互換の回数と，それを逆にたどった σ^{-1} の互換の回数は一致するから，一般に $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$．さらに，$\sigma$ が $\mathfrak{S}_n$ の全体を動くとき，σ^{-1} もまた $\mathfrak{S}_n$ の全体を動く．そこで $\sigma' := \sigma^{-1}$ とおく．

以上，n 次行列式の完全展開 (16.3) p62 を中心に述べたが，この他にも，行列式を段階的に展開していく方法がある．それを述べて本節を終わろう．3×3 の行列式 $D(v_1, v_2, v_3)$ は，$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とするとき，

$$D(v_1, v_2, v_3) = D(\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{31}\boldsymbol{e}_3, v_2, v_3)$$

と書けるから，符号付き体積の 3 重線形性によって，

$$D(v_1, v_2, v_3) = \alpha_{11}D(\boldsymbol{e}_1, v_2, v_3) + \alpha_{21}D(\boldsymbol{e}_2, v_2, v_3) + \alpha_{31}D(\boldsymbol{e}_3, v_2, v_3)$$

と展開できる．展開に現われる $D(\boldsymbol{e}_1, v_2, v_3)$，$D(\boldsymbol{e}_2, v_2, v_3)$，$D(\boldsymbol{e}_3, v_2, v_3)$ を**余因子**という．これを求めよう．

Example 16.1　$D(\boldsymbol{e}_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ を示せ．

▶ **解答例**　歪対称性 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{e}_1, v_2, v_3) &= D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, v_3) \\
&= \alpha_{12} D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, v_3) + D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, v_3) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, \alpha_{13}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3) \\
&= \alpha_{13} D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \\
&\qquad + D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3) \\
&= D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2, \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3) + D(\boldsymbol{e}_1, \alpha_{32}\boldsymbol{e}_3, \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2) \\
&= \alpha_{22}\alpha_{33} D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \alpha_{32}\alpha_{23} D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
&= \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercise 16.5　同様にして,

$$
D(\boldsymbol{e}_2, v_2, v_3) = -\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad D(\boldsymbol{e}_3, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}
$$

を示せ.

したがって，符号付き体積が持つ 3 重線形性，歪対称性，単位面積の性質によって，3×3 の行列式は小さな行列式で，次のように展開できることが分った.

$$
D(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \tag{16.4}
$$

これを行列式の**余因子展開**という.

あるいは，まん中の $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$ を係数として展開したいときは，原理的には,

$$
D(v_1, v_2, v_3) = \alpha_{12} D(v_1, \boldsymbol{e}_2, v_3) + \alpha_{22} D(v_2, \boldsymbol{e}_2, v_3) + \alpha_{32} D(v_3, \boldsymbol{e}_2, v_3)
$$

を計算すればよいことになるが，実用的には，歪対称性による符号の反転に注意して列を交換し，以上の計算結果を読み換えるほうが楽である.

►► 行列式は転置しても値を変えないので，次のような展開も可能である.

$$
\begin{aligned}
D(v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\
&= \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{22} & \alpha_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

線形代数の講義で暗記させられるのは，こちらのほうかも知れない.

関連図書

[1] 松坂和夫著, 集合・位相入門, 岩波書店, 2002.