

# 第 15 回 機械力学

## 減衰比と固有振動数

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

# 学習目標

- 数学モデルを「標準形」に変形する。
  - 振動系  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  のパラメータを、2 個  $\zeta, \omega_n$  に集約。
  - 固有値を分りやすくする。
- 固有値とは別の動特性パラメータがある。
  - 減衰比とは？
  - 固有振動数とは？

# 変数変換

数学モデル  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  のパラメータを減らす。

(1)  $m > 0$  で割る:  $C = c/m$ ,  $K = k/m$  とおけば,

$$\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

固有値は,  $\frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4K}}{2}$  となる。

⇨ 固有値のバリエーションが,  $C$  と  $K$  に依存する。

(2)  $\sqrt{2}$  個のパラメータを  $\sqrt{1}$  個のパラメータにするため,

$$C = 2\zeta\omega_n, \quad K = \omega_n^2$$

とおく  $\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0}$  **標準形!**

$\Rightarrow$  固有値  $= \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$

**固有値のパターンが,  $\zeta$  だけで決まる!**

減衰比	$\zeta$	$\frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$
固有振動数	$\omega_n$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$

## 2種類の動特性パラメータ

### ■ 固有値：

構造  $(m, c, k)$   $\Rightarrow$  動特性  $a \pm ib = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$

- 固有値の実部  $a$  ... 減衰特性
- 固有値の虚部  $b$  ... 振動数

### ■ 減衰比・固有振動数：

構造  $(m, c, k)$   $\Rightarrow$  動特性  $(\zeta, \omega_n) = \left( \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$

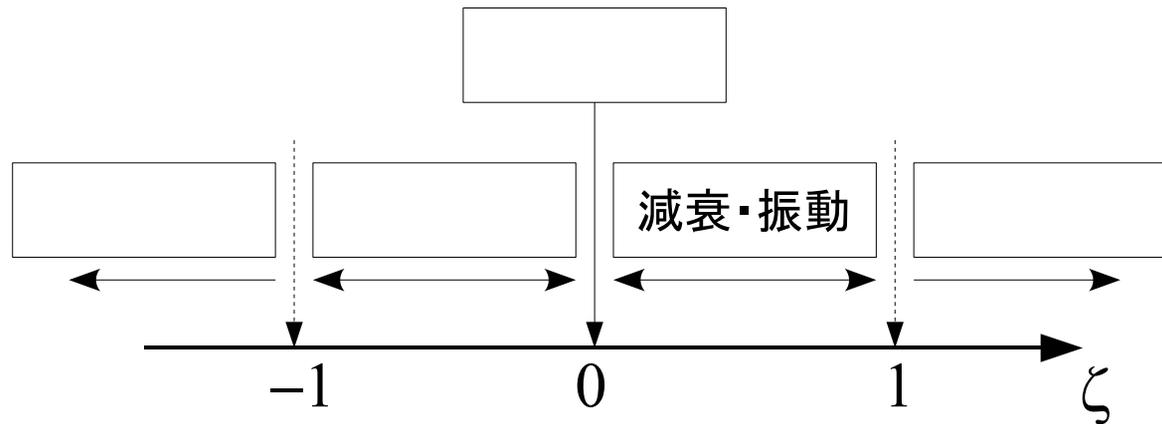
- 減衰比  $\zeta$  ..... 減衰特性
- 固有振動数  $\omega_n$  ... 振動数

発想は同じだが，使い勝手が違う．

# 減衰比 $\zeta$ による振動パターンの整列

■ 減衰比・固有振動数で書いた固有値：

$$s = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$



## 例題 13.1 (p.128)

残りの空欄を埋めよ．各区間の  $\zeta$  を選び，固有値を求めて表 13.1 p.122 と照合すればよい．

## 振動パターンの整列 (表 13.3 p.128)

減衰比の範囲	名称	オーバーシュート
$\zeta = 0$	無減衰 (undamped)	有
$0 < \zeta < 1$	不足減衰 (under-damping)	有
$\zeta = 1$	臨界減衰 (critical damping)	無
$1 < \zeta$	過減衰 (over-damping)	無

オーバーシュート ... つりあい点を, 1 回以上, 横切る動き方 .

# 第7回 機械力学レポート

機械力学サイト <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn>

- 第15週授業にて出題。
- レポート用紙：機械力学サイトからダウンロード・印刷。
  - 1枚以内。裏面使用時は「裏につづく」と明記。  
よく似たレポートは不正行為の証拠とする。(当期全単位0)
- 提出期限：次回の前日(次々回以降は受け取らない)
  - 公欠などは早めの提出で対応せよ。
- 提出先：機械棟 3F・システム力学研究室(2)のBOX。