

第12回 機械力学

ロボットの運動方程式

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

実習の班で相談し，自習を完了してください！

■ 第 12 週までに，テキスト 15 章を自習せよ．

- 単独で進めず，実習の班で助け合うこと．
- この自習を前提に，第 3 回レポートを課す．

■ 必要なプログラム例は，

`http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/code`

にある．

学習目標

■ 解析力学入門

- ニュートン力学の難点

- 座標変換とエネルギーから，運動方程式を算出する！

■ オイラー・ラグランジュ方程式

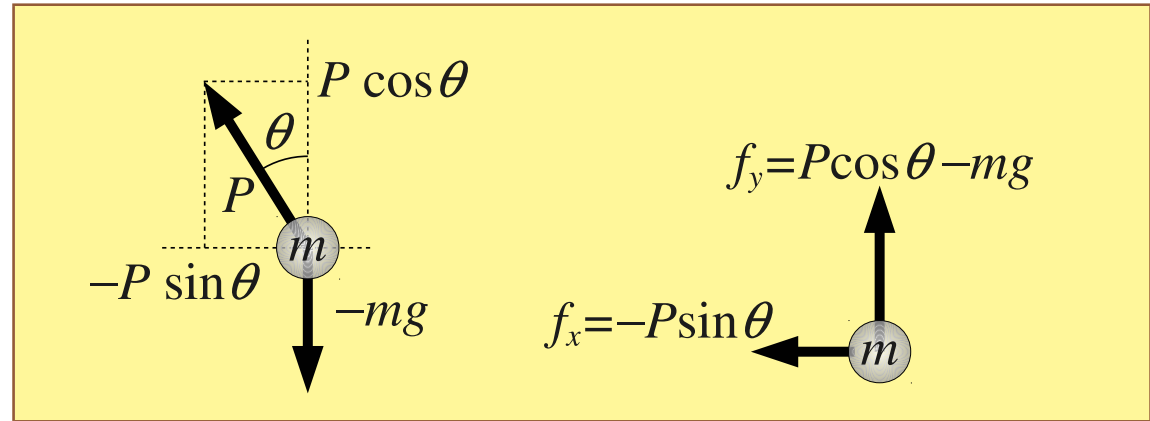
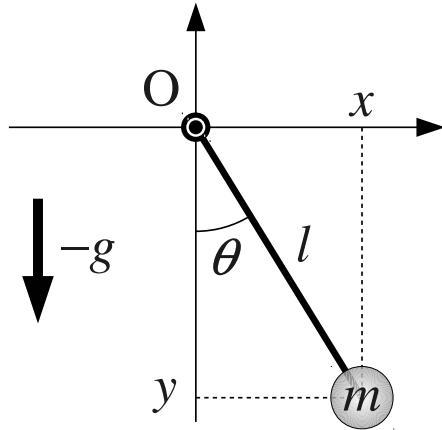
■ 自立ロボットへの応用

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

ニュートン力学の難点

単振り子



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P \sin \theta & (= f_x) \\ m\ddot{y} = P \cos \theta - mg & (= f_y) \end{cases}$$

■ 運動方程式 × 2 本 \iff 未知数 4 個 $x(t), y(t), P, \theta$

■ 張力 (内力) P の消去! $\implies l = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ は一定

張力 P とその方向 θ の消去？

4 連立の微分代数方程式を解かねばならない！

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P \sin \theta & \text{(運動方程式)} \\ m\ddot{y} = P \cos \theta - mg & \text{(運動方程式)} \\ l = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{(代数方程式)} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 & \text{(代数方程式)} \end{cases}$$

■ 例えば y と $P \sin \theta$ を消去するには，

■ $y = \pm \sqrt{l^2 - x^2} \implies \ddot{y} = \mp \{ (l^2 - x^2)\ddot{x} + l^2\dot{x}^2 \} (l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$

■ $P \cos \theta = mg + m\ddot{y} = mg \mp m \{ (l^2 - x^2)\ddot{x} + l^2\dot{x}^2 \} (l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\therefore P \sin \theta = P \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \dots \quad \text{もうやだ！}$$

解析力学入門

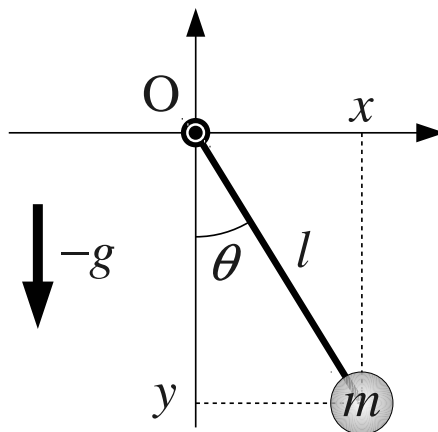
ロボットの運動方程式を求める標準的方法

「座標変換」と「エネルギー」から
運動方程式を算出できる！

機構学的な自由度



機構の姿勢を表すのに最低限必要な変数の数



- 振り子の姿勢は $\theta(t)$ だけで表せる .
 - 運動方程式は一本でいい？
 - どうせ消去する張力 P を考えるのは無駄？

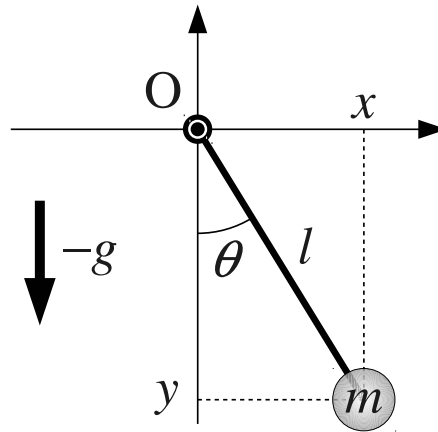
ラグランジュ形式の解析力学

運動方程式の求め方

- (1) 座標変換を定める．
- (2) 全運動エネルギー T を求める．
- (3) 全ポテンシャル U を求める．
- (4) その差 $\mathcal{L} = T - U$ を，公式に代入する．

4 段階の操作で，運動方程式が「算出」される！

振り子の運動方程式 1/4



(1) 座標変換を定める．直交座標 (x, y) ← 角度 θ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} //$$

振り子の運動方程式 2/4

(2) 全運動エネルギー \mathcal{T} を求める .

$$\boldsymbol{x} = l \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \implies \dot{\boldsymbol{x}} = l\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{T} = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 //$$

(3) 全ポテンシャル \mathcal{U} を求める .

$$\boldsymbol{x} = l \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \longleftarrow \text{質点の高さ } h = -l \cos \theta$$

$$\therefore \mathcal{U} = mgh = -mgl \cos \theta //$$

振り子の運動方程式 3/4

(4) その差 $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ を，公式に代入する．

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta //$$

公式（オイラー・ラグランジュ方程式）

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

演習タイム 1/3

- 次の微分を計算せよ． $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ ， $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ ， $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$
- 公式に代入して，運動方程式を求めよ．

振り子の運動方程式 4/4

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$



公式： $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$



運動方程式： $ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 //$

オイラー・ラグランジュ方程式

オイラー・ラグランジュ方程式

一般形

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11.10) \text{ p.110}$$

■ $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ …… ラグランジュ関数

■ \mathcal{T} … 運動エネルギー

■ \mathcal{U} … ポテンシャル

■ q_i …… 一般化座標 \implies 後述

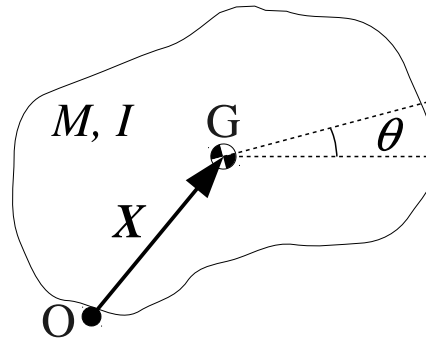
■ \mathcal{F}_i …… 一般化力 \implies 後述

■ \mathcal{D} …… 散逸関数 10.4.2 節 p.101

一般化座標 q_i

定義

単位の異なる成分を並べた座標



$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & [\text{m}] \\ x_2 & [\text{m}] \\ \theta & [\text{rad}] \end{bmatrix} \quad \text{とか} \quad \begin{bmatrix} \theta & [\text{rad}] \\ x_1 & [\text{m}] \\ x_2 & [\text{m}] \end{bmatrix} \quad \text{など}$$

成分の並べ順は，各自の勝手によい！

一般化力 \mathcal{F}_i

「力」とは何か？

- 力 F は、質点の運動方程式： $m\ddot{X} = F$ を介して、
- 質点の座標 X を増加・減少させる！

⇩ 同様に

「一般化力」とは何か？

- 一般化力 \mathcal{F}_i は、オイラー・ラグランジュ方程式：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad \text{を介して、}$$

- 一般化座標 q_i を増加・減少させる！

換算：普通の力 $F \implies$ 一般化力 \mathcal{F}

■ 直交成分：普通の力 $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$ ，着力点 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

■ 座標変換：着力点の直交成分 $x_i \longleftarrow$ 一般化座標 q_i

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_m)$$

■ 換算の公式： $\mathcal{F}_i = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} F_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} F_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} F_3$ (算法 11.2)

演習タイム 2/3

■ 例題 11.1 p.111

- 直交成分：力 F と，先端の着点 x を直交成分で表せ．
- 座標変換：着点の直交成分 x_i を，角度 q_1, q_2 で表せ．
- 換算の公式：次式に代入して，トルク $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を求めよ．

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} F_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_1} F_2 \\ \mathcal{F}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial q_2} F_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} F_2 \end{cases}$$

演習タイム 3/3

■ 11.3 節 p.112 ~ 113 を自習せよ！