

# 第4回 機械力学

## 剛体に働く力

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

# 学習目標

- 剛体とは？ 質点とは？
- 作用線上の力の平行移動
- 偶力とトルクの平行移動
- 力とトルクの集約
- 剛体の釣合い

## 学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

# 剛体とは？ 質点とは？

## ■ 初等力学における物体の「運動」

- 「位置」の時間変化を 並進運動 という。
- 「姿勢角」の時間変化を 回転運動 という。

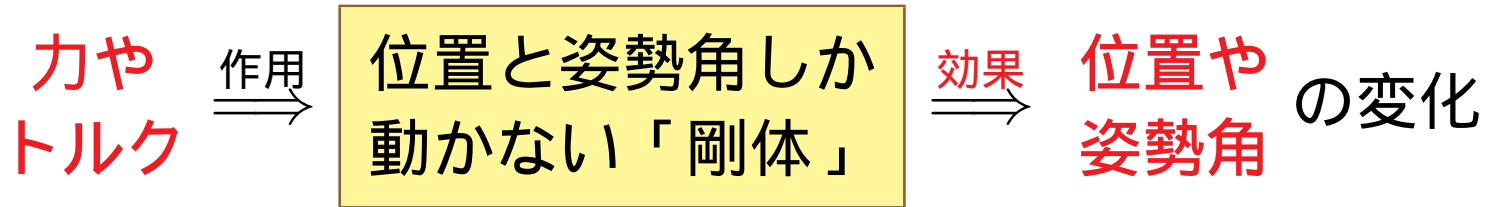
## ■ 剛体 $\xleftrightarrow{\text{定義}}$ 並進運動と回転運動しかできない架空の物体

- そうなるように「変形」を無視する。（冷凍うどんを投げよ）
- 変形を無視した物体を 剛体 という。

## ■ 質点 $\xleftrightarrow{\text{定義}}$ 並進運動しかできない架空の物体

- そうなるように「大きさ」を 0 にする  $\therefore$  姿勢角を無効化
- 大きさ 0 の物体を 質点 という。

# 剛体に対する力やトルクの「効果」とは？



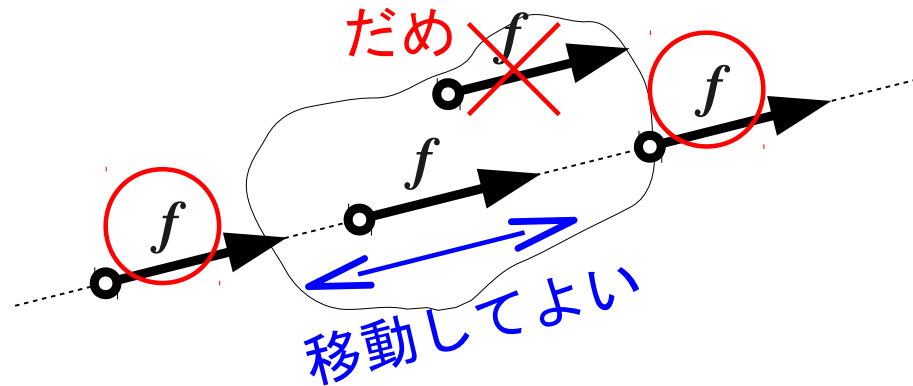
剛体に対しては

「位置」や「姿勢角」を変化させる効果のこと！

# 作用線上の「力」の平行移動

## 力学法則 4.1 (p.32)

力  $f$  の着力点を，作用線上の別の点に移しても，力の効果は変わらない。



# 演習タイム 1/3

## ■ 例題 4.1, p.32

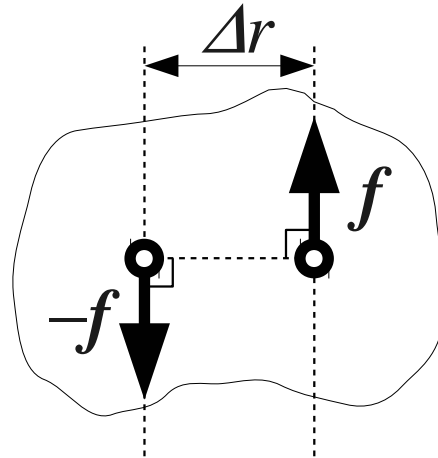
### ヒント

- 力は「効果」を変えずに作用線上で平行移動可能（力学法則 4.1）
- 着力点と同じ力  $f_1, f_2$  の合力は  $f_1 + f_2$ （力学法則 2.1, p.11）

# 偶力 ( force couple )



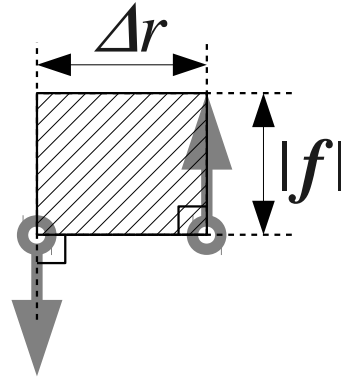
逆向き・同じ大きさの力のペア ( $f, -f$ ) のこと。



■ 偶力は「回転作用」しか引き起さない。

⇒ (剛体の) 姿勢角は変えるが, 位置は変えない。

# 偶力が発生するトルク



■  $T = \text{腕の長さ} \times \text{力の大きさ} = \Delta r |f|$

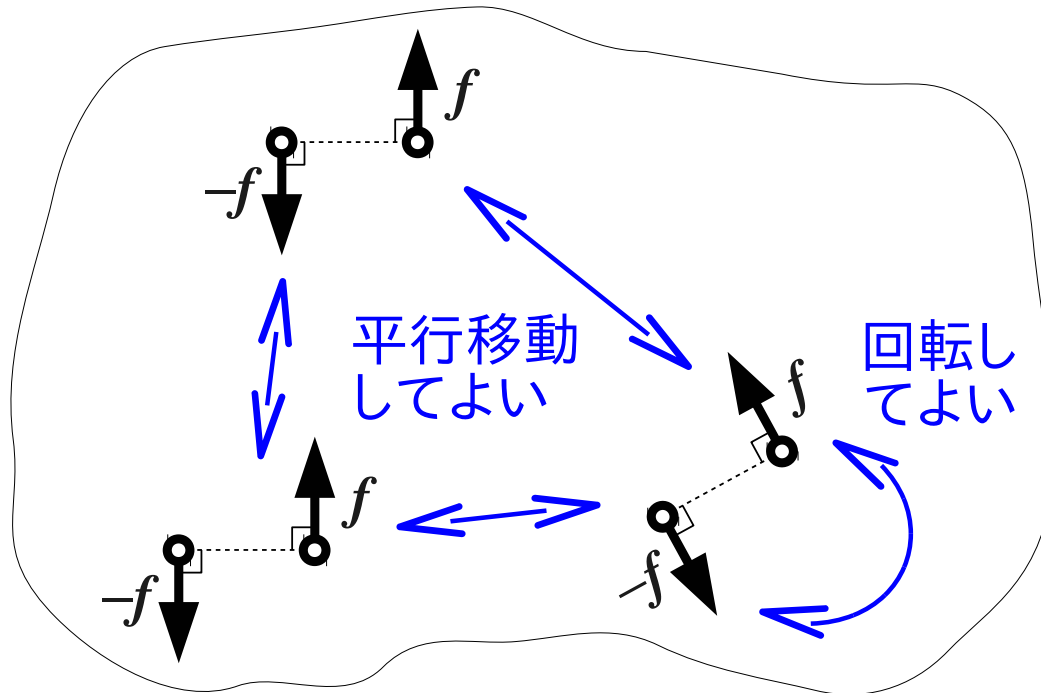
■ 幅  $\Delta r$  を「偶力の腕」という。



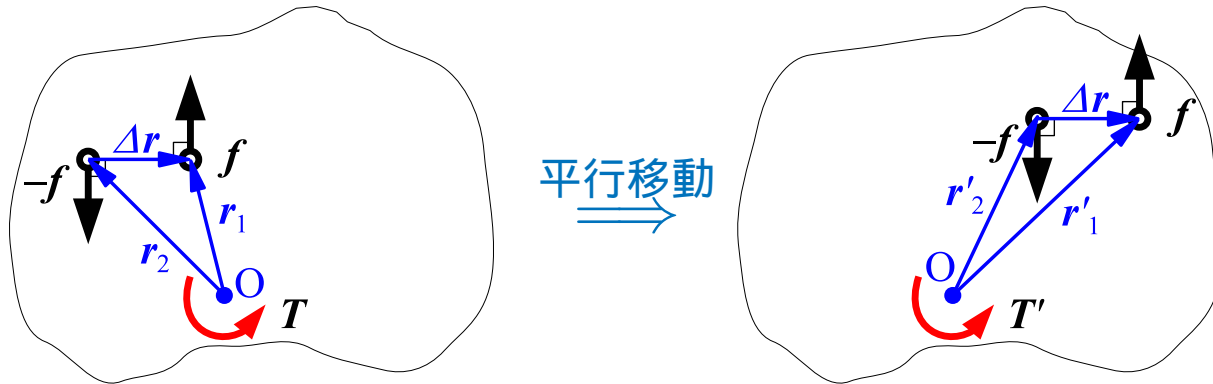
# 偶力の不思議な性質

## 力学法則 4.2 (p.33)

偶力 ( $f, -f$ ) を，作用面 (またはそれと平行な面) 内で，平行移動または回転しても，その効果は変わらない。



# 力学法則 4.2 ( p.33 ) の証明



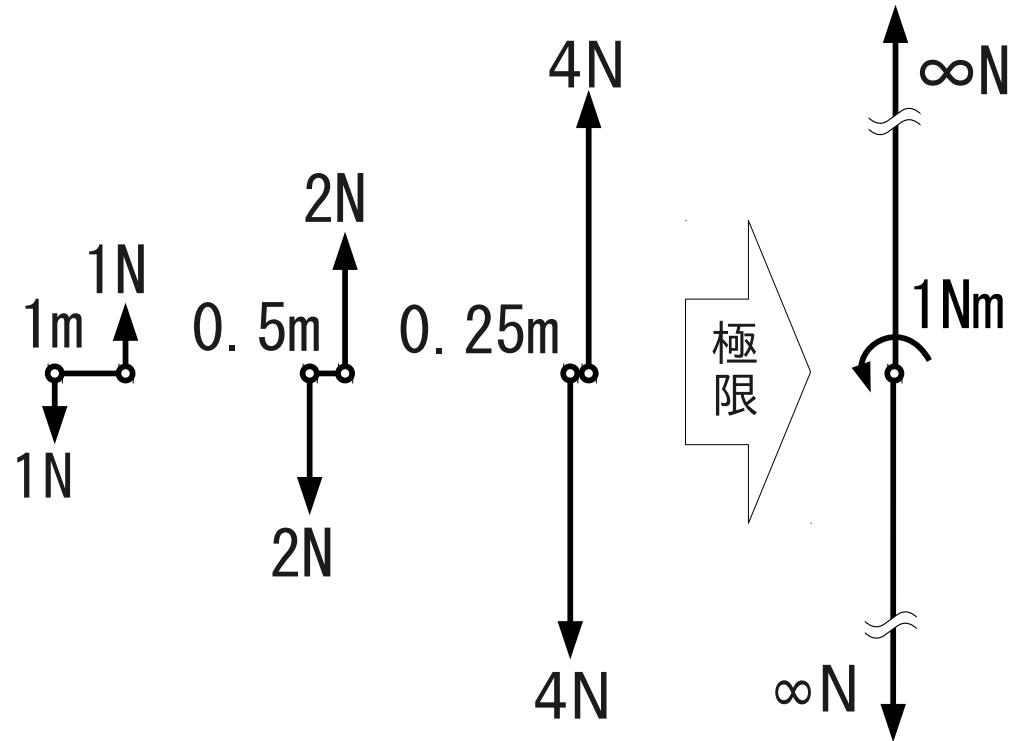
$$\begin{aligned}
 T &= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f} + \mathbf{r}_2 \wedge (-\mathbf{f}) = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f} - \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{f} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{f} \\
 &= (\Delta \mathbf{r}) \wedge \mathbf{f}, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 //
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

平行移動しても，腕は共通  $\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  なので，

$$T' = (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \wedge \mathbf{f} = (\Delta \mathbf{r}) \wedge \mathbf{f} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{f} = T \tag{4.3}$$

∴ 偶力の大きさは，偶力を平行移動しても不変 //

# 1 点に作用するトルク = 幅 0 の偶力

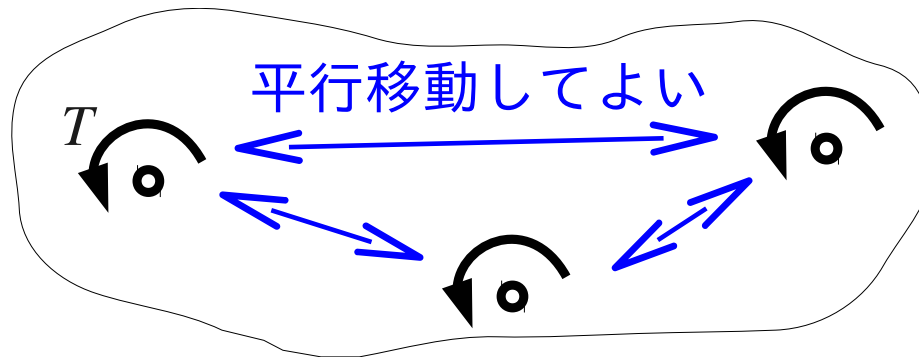


# トルクの平行移動 — 偶力と同じ法則

- トルク  $T$  は偶力の一形態  $\therefore$  力学法則 4.2 と同じ法則が成立！

## 力学法則 4.3 (p.35)

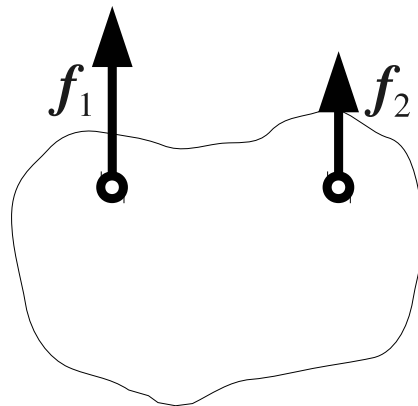
トルク  $T$  を平行移動しても，剛体に与える効果は不変．



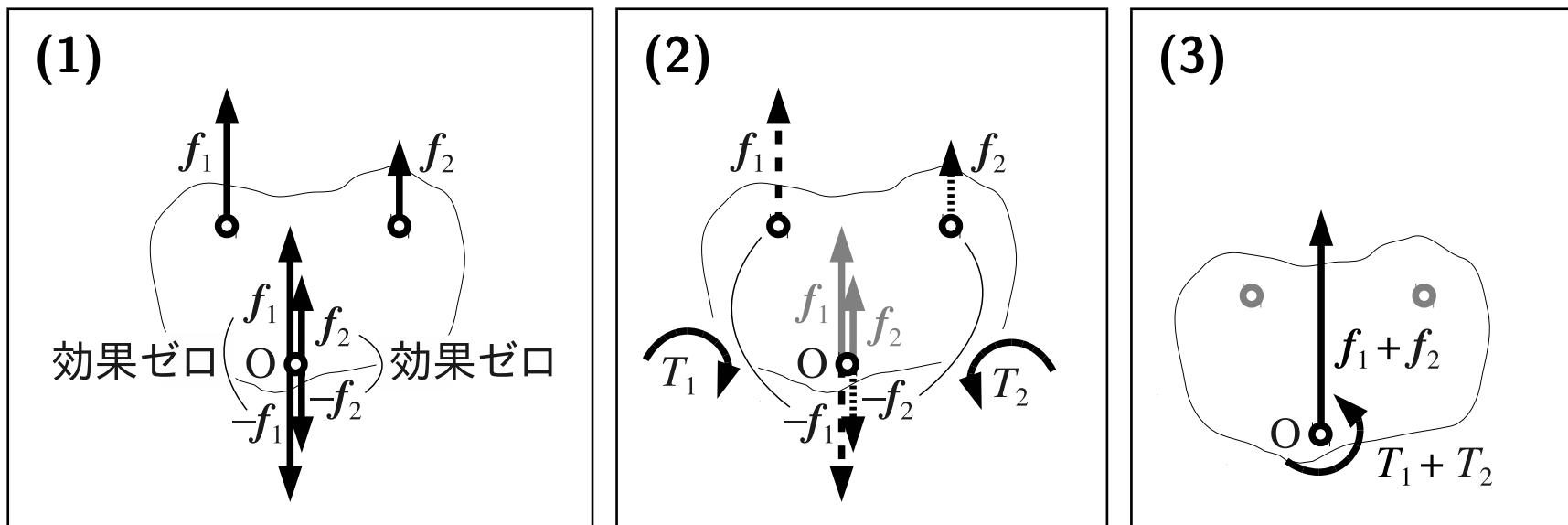
( $T$  を  $T$  とすれば 3 次元の法則となる)

# 力とトルクの集約

- 2 力  $f_1, f_2$  は , 1 対の力とトルクに集約できる !



# 作図による集約 簡単のため 2 力が平行な場合



- (1) 基準点  $O$  に相殺する力  $f_i, -f_i$  を置く．  $f_i + (-f_i) = \mathbb{O}$  より，剛体への影響は追加されない．
- (2) 偶力を拾って，トルク  $T_i$  に変換する． 基準点  $O$  以外の力が消える．
- (3) 基準点  $O$  で，全ての力とトルクを合成  $f = f_1 + f_2, T = T_1 + T_2$  する． [力学法則 3.1, p.24](#)
- (4) 得られた  $f, T$  が，基準点  $O$  で測った剛体への全作用を表す．

# 計算（ベクトル）による集約

## 力学法則 4.4 (p.37)

力  $f_1, f_2, \dots$  と、単独のトルク  $T'_1, T'_2, \dots$  の全作用は、勝手に選べる基準点  $O$  における、次の 2 つの総和  $F, T$  に集約される。

(1) 基準点  $O$  を着力点とする合力  $F = f_1 + f_2 + \dots$  .

(2)  $f_i$  が基準点  $O$  に発生するトルク  $T_i$  と、その他のトルク  $T'_j$  の総和  $T = T_1 + T_2 + \dots + T'_1 + T'_2 + \dots$  .



## 演習タイム 2/3 (材料力学に必要)

■ 例題 4.3, p.37

■ 例題 4.4, p.38



# 剛体の釣合い条件

**定義** 剛体に働く「力の総和  $F$ 」と「トルクの総和  $T$ 」が  $0$  :

$$F = \mathbf{0}, \quad T = 0 \quad (4.6) \text{ p.38}$$

- 未知数を含む釣合い条件を，釣合い方程式という．
- 剛体に働く力とトルクが釣合い条件を満たすとき，これらが「剛体の運動」に及ぼす効果はゼロになる．

## 力学法則 4.6 (p.38)

釣合い条件を求める**基準点**は，**どこに置いてもよい**．

## 演習タイム 3/3 (材料力学に必要)

■ 例題 4.5, p.38

■ 例題 4.6, p.39

## 第 2 回 機械力学レポート

機械力学サイト <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn>

- 第 4 週授業にて出題 .
- レポート用紙：機械力学サイトからダウンロード・印刷 .
  - 1 枚以内 . 裏面使用時は「裏につづく」と明記 .  
よく似たレポートは不正行為の証拠とする . (当期全単位 0)
- 提出期限：次回の前日 (次々回以降は受け取らない)
  - 公欠などは早めの提出で対応せよ .
- 提出先：機械棟 3F・システム力学研究室 (2) の BOX .