

第3回 機械力学

トルクとその合成

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

学習目標

- 表記上の注意
- 2次元のトルク
- 2次元のトルクの算法 — 符号付き面積
- トルクの釣合い

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

表記上の注意

これ以降，ベクトル x と成分 \tilde{x} を同一視する！

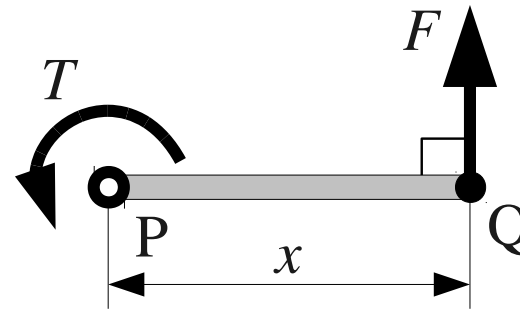
■ 理工学の慣習にしたがい， $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のような表記を認める．

■ **暗黙の前提**

ある正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle i, j, k \rangle$ を 1 つ選んで使い続ける．

$$\Rightarrow x \overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow} \tilde{x}$$

トルクの定義



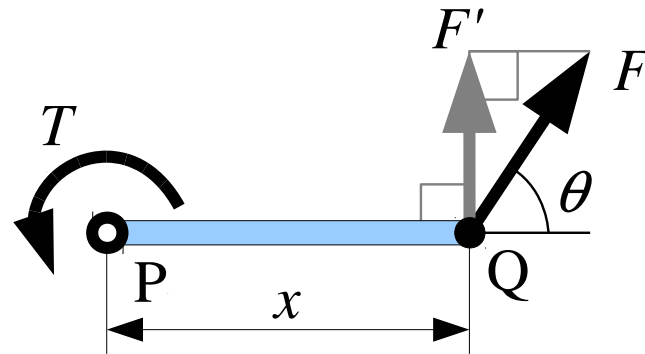
- 点 P にかかる回転性の力を , 力 F と長さ x の積 ,

$$T = Fx \quad [\text{Nm}] \quad (3.1) \text{ p.20}$$

で表す . これを トルク または 力のモーメント という

- トルクの正 $\overset{\text{定義}}{\rightleftarrows}$ x 軸 (第 1 座標) から y 軸 (第 2 座標) に回す向き .

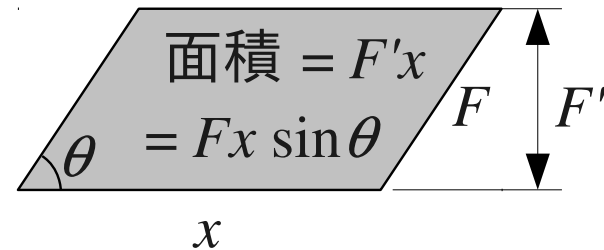
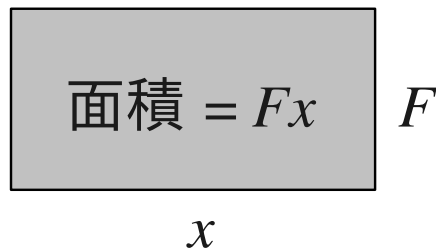
トルクの定義 (斜めの場合)



- 力 F が斜めのときは，直角方向の分力 F' でトルクを定める．

$$T = F'x = (F \sin \theta)x = Fx \sin \theta \quad [\text{Nm}] \quad (3.2) \text{ p.21}$$

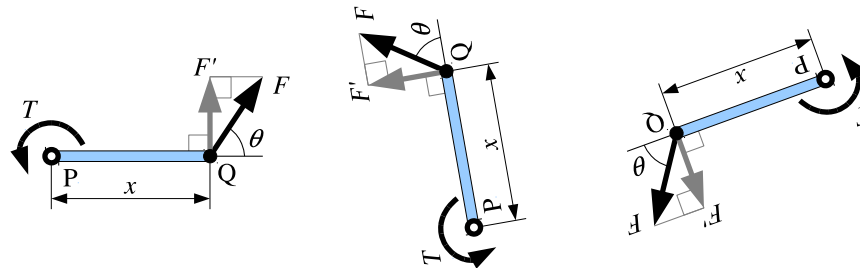
- トルク = 平行四辺形の面積



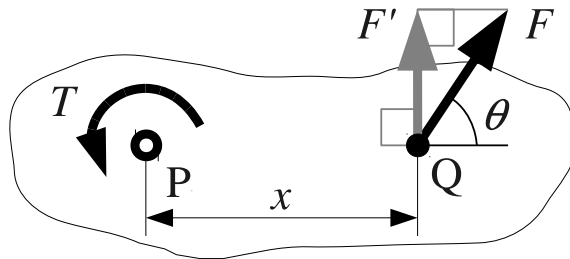
トルクの性質

■ トルク = 平行四辺形の面積

- 回転しても面積は変わらない ↓ 以下のトルクは同じ値をとる .

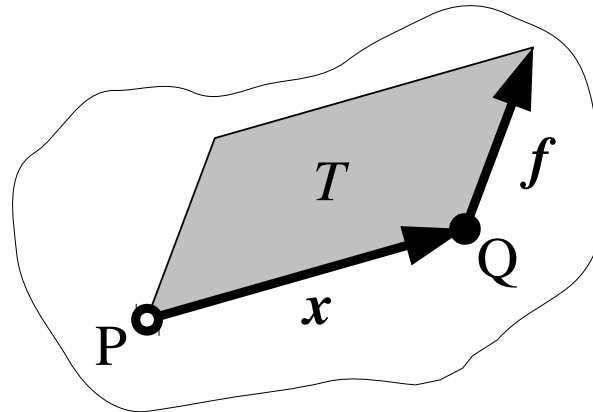


- P, Q, F の相対位置が同じなら同じトルク . 物体形状は無関係 !



物体形状を「あいまい」にするため
うねうねの作図が多い

2次元トルクの数式表現



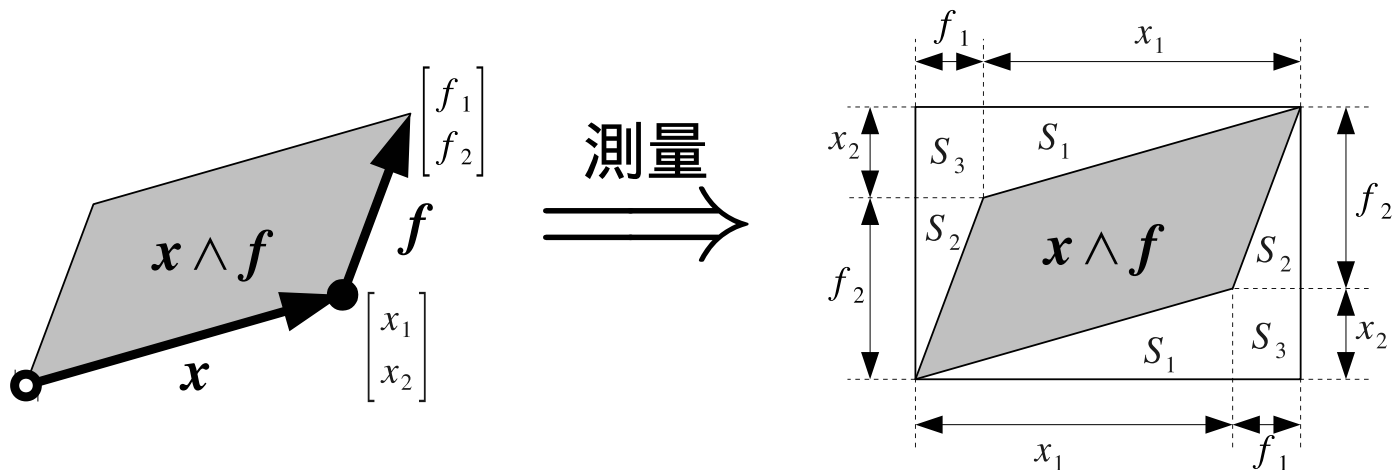
- x, f を 2 辺とする平行四辺形の面積を，次のように表記する．

$$T = x \wedge f \quad (\text{“}\wedge\text{” はウェッジと読む}) \quad (3.3) \text{ p.22}$$

- $x \wedge f$ の値は「**行列式**」で計算できる．

$$T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \end{vmatrix} = x_1 f_2 - f_1 x_2 \quad (3.5) \text{ p.22}$$

「2次元トルク = 行列式」の証明



■ 外接する長方形から，余分な面積を除くと，平行四辺形の面積は，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \wedge \mathbf{f} &= \underbrace{(x_1 + f_1)(x_2 + f_2)}_{\text{長方形}} - \underbrace{x_1 x_2}_{2S_1} - \underbrace{f_1 f_2}_{2S_2} - 2 \underbrace{x_2 f_1}_{S_3} \\
 &= x_1 f_2 - f_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

より「**行列式**」になる．証明終り．

2次元トルクの算法

算法 3.2 (p.23)

- 平行四辺形の面積を表す行列式 $x \wedge y$ を、**符号付き面積**という。
 - $x \wedge y$ は次のルールで式変形できる
- (1) $x \wedge y = -y \wedge x$. (反対称性)
ゆえに $x \wedge x = 0$. ($\because x = y \Rightarrow x \wedge x = -x \wedge x \Rightarrow 2x \wedge x = 0$)
 - (2) $(a + b) \wedge y = a \wedge y + b \wedge y$, $x \wedge (a + b) = x \wedge a + x \wedge b$,
 $(\lambda x) \wedge y = \lambda(x \wedge y)$, $x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$. (分配則)
 - (3) 正規直交基底 $\langle i, j \rangle$ に対して, $i \wedge j = 1$. (単位面積)

行列式の式変形ルールそのもの

トルク $x \wedge f$ は「**かけ算**」と同じ分配則で式変形できる！

演習タイム

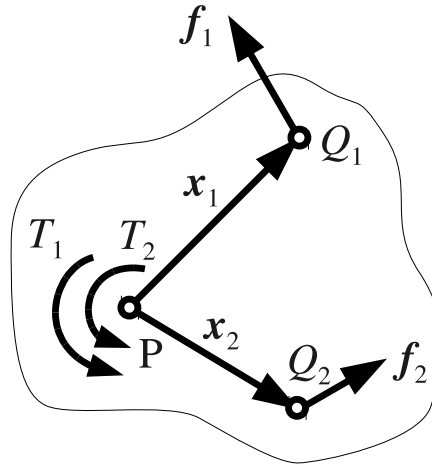
■ 問題 3.1, p.23

■ 例題 3.1, p.23

1 点に作用するトルクの合成

力学法則 3.1 (p.24)

剛体上の着力点 Q_1, Q_2 に、力 f_1, f_2 が作用するとき、



点 P にかかるトルク T は、各 f_i が発生するトルク T_i の和、

$$T = T_1 + T_2 = \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 \quad (3.7)$$

となる。


演習タイム（材料力学に必要）

■ 例題 3.2, p.24

■ 例題 3.3, p.24

トルクの釣合い

トルクの釣合い条件

 **定義** 物体に働くトルク T_1, T_2, \dots の総和が 0 となる条件 :

$$T := T_1 + T_2 + \dots = 0 \quad (3.13) \text{ p.28}$$

- 未知数を含む釣合い条件を , 釣合い方程式という .
- 物体に働くトルクが釣合い条件を満たすとき , トルクが「物体の運動」に及ぼす効果はゼロになる .

演習タイム（材料力学に必要）

■ 例題 3.4, p.28

■ 例題 3.5, p.28