

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスと制御工学

(数列と複素数の使い道)

宇都宮大学 工学研究科
准教授 吉田勝俊

この教材は、下記からダウンロードできます。
<http://edu.katzlab.jp/lec/kyoin/>

教員免許講習 機械工学 1

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

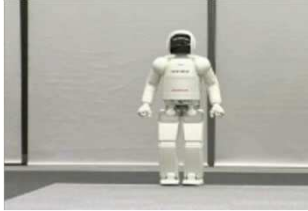
講師の紹介

- 所属: 機械システム工学科 / 機械知能工学専攻
- 担当授業: 機械力学, 機構学, ロボット力学
※機械の動き方・動かし方
- 研究内容:
 - マルチヒューマンダイナミクス ※手押し相撲
 - 対戦・協調ロボットシステム
 - 複雑系工学

教員免許講習 機械工学 2

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

講義の目標



- ロボットの設計 = 機械 + 電気 + IT + α ?
答: α = **ダイナミクスの設計!**
- **ダイナミクス**を題材に、「数列」や「複素数」の使い道を紹介する。

教員免許講習 機械工学 3

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

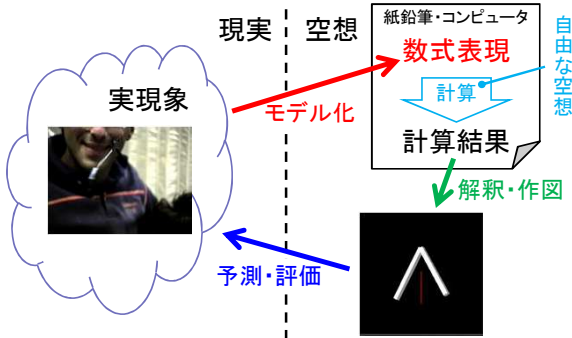
数学という空想

- 数列はまだしも, 複素数 $\alpha + \beta i$ て何?
 - 虚数 $i \equiv \sqrt{-1}$ ← **こんなもの実在するのか?**
 - 不思議なことに, 現実を説明できる.
 - ダイナミクスはその一例.
- 数学は, 紙に文字で書く空想
 - 小説と同じく, 実在しないものも記述できる.
 - 違いは客観性. 数学による空想(計算)では, 個人差を排除できる.

教員免許講習 機械工学 4

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

空想の使い方 — モデル化



教員免許講習 機械工学 5

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

講義の内容

- ① ダイナミクスの実例
- ② ダイナミクスの分類
- ③ ダイナミクスのモデル化
 - 離散時間モデル ※等比数列
 - 連続時間モデル ※複素数
- ④ まとめ

教員免許講習 機械工学 6

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスの実例

※dynamics

ダイナミクス ⇔ 動き方(時間変動)

教員免許講習 機械工学 7

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ロボットのダイナミクス



位置と角度の時間変動

教員免許講習 機械工学 8

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ペンチのダイナミクス(無重力)

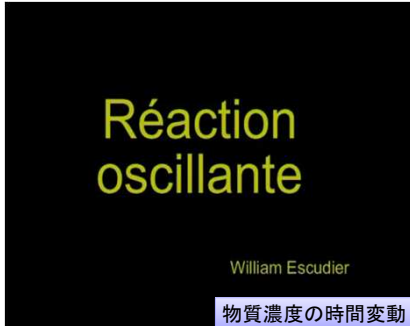


角度の時間変動

教員免許講習 機械工学 9

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

化学反応のダイナミクス(BZ反応)



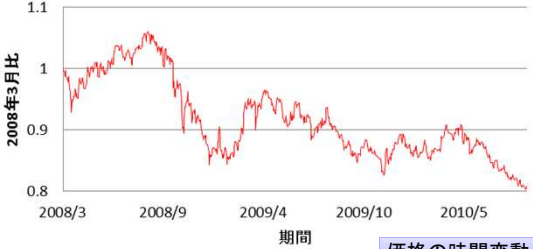
物質濃度の時間変動

教員免許講習 機械工学 10

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

経済のダイナミクス

日本円/米ドル



価格の時間変動

教員免許講習 機械工学 11

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

まとめ — ダイナミクスの実例

- ダイナミクスとは、時間変動のこと。
- 世界は、ダイナミクスに満ち溢れている。
 - 力学, 化学, 経済, 電気, 生体, ...

無数に存在する!

教員免許講習 機械工学 12

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスの分類

→大きく5種類に類別される

教員免許講習 機械工学 13

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

5種類のダイナミクス

非振動

単調減衰

安定

減衰振動

振動

単振動

発散振動

不安定

教員免許講習 機械工学 14

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスのモデル化

→ダイナミクスを計算する！

教員免許講習 機械工学 15

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

目的と方法

- 5種類のダイナミクスを説明・予測したい。
→計算可能なモデルを作る。

- 2つの方法がある！
 - 数列を使う（離散時間モデル）
 - 関数を使う（連続時間モデル）

教員免許講習 機械工学 16

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデル

→ダイナミクスを「数列」で表す方法

教員免許講習 機械工学 17

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデル

$$X_{n+1} = C X_n$$

- n 時間(整数)
- X_n 現在の数量(実数)
- X_{n+1} ... 未来の数量(実数)
- C パラメータ(実数) ※模倣用の係数

C を調整すると、様々なダイナミクスが模倣できる！（本当に？）

教員免許講習 機械工学 18

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

数列の復習

等差数列の例: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
 等比数列の例: 1, 3, 9, 27, 81, ... ←こちらを活用!

■ 等比数列の数式表現

- $x_0=1 \cdot 3^0, x_1=1 \cdot 3^1, x_2=1 \cdot 3^2, x_3=1 \cdot 3^3, \dots$
- 法則 $\Rightarrow x_n=1 \cdot 3^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

一般形 $x_n = x_0 C^n$
 初項 $x_0=1$
 公比 $C=3$

教員免許講習 機械工学 19

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデルの解

$$X_{n+1} = CX_n$$

解法: 初期値 X_0 を与えて, 代入を繰り返す
 $X_0, X_1 = CX_0, X_2 = CX_1 = C^2X_0, X_3 = CX_2 = C^3X_0, \dots$

解 $\Rightarrow X_n = C^n X_0$

解は, 初項 X_0 , 公比 C の「等比数列」!

教員免許講習 機械工学 20

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

練習問題

等比数列 $x_n = x_0 C^n$
 初項 公比

■ 次の C で数列を求め5種類に分類せよ ($x_0=1$ とせよ)

- $C=0.2$
- $C=-0.2$
- $C=-1$
- $C=-2$
- $C=2$

単調減衰 減衰振動 単振動
 発散振動 単調発散

教員免許講習 機械工学 21

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

$X_{n+1} = CX_n$ のダイナミクス

C	ダイナミクス	数値例 (初項 $x_0=1$)
$C < -1$	発散振動	($C=-2$) 1, -2, 4, -8, 16, -32, ...
$C = -1$	単振動	($C=-1$) 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...
$-1 < C < 0$	減衰振動	($C=-0.2$) 1, -0.2, 0.04, -0.008, ...
$C = 0$	未定義 (不良定義)	考えない
$0 < C < 1$	単調減衰	($C=0.2$) 1, 0.2, 0.04, 0.008, ...
$C = 1$	一定値	($C=1$) 1, 1, 1, 1, 1, ...
$1 < C$	単調発散	($C=2$) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

パラメータ C を見れば, 一発で分かる!

教員免許講習 機械工学 22

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

まとめ — 離散時間モデル

■ 離散時間のダイナミクスは公比で決まる.

- 絶対値 ... 減衰 (<1), 発散 (>1)
- 正負 ... 振動 (-), 単調 (+)

■ 「等比数列」はダイナミクスの模倣に役立つ!

教員免許講習 機械工学 23

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル

→ 立位ロボットを立てる!

教員免許講習 機械工学 24

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

立位ロボットの原理モデル

倒立振り子モデル



応用例



2足歩行ロボット

教員免許講習 機械工学 25

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

立位ロボットの設計

現実 | 空想

立位ロボット

モデル化

数式表現 $q'' - g q = -F$

空想

複素数

解釈

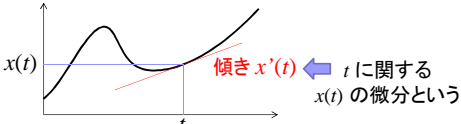
適用

ダイナミクス
の分類

教員免許講習 機械工学 26

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》微分法



傾き $x'(t)$ ← t に関する $x(t)$ の微分という

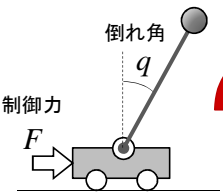
■ 微分法の例(高校数学)

- $x(t) = t^n \Rightarrow x'(t) = nt^{n-1}$ ※ 整数関数
- $x(t) = e^{at} \Rightarrow x'(t) = ae^{at}$ ※ 指数関数
- $x(t) = \sin(bt) \Rightarrow x'(t) = b \cos(bt)$ ※ 三角関数
- $x(t) = \cos(bt) \Rightarrow x'(t) = -b \sin(bt)$ ※ 三角関数

教員免許講習 機械工学 27

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

倒立振り子モデルの数式表現



倒れ角 q

制御力 F

ニュートンの法則

数式表現 $q''(t) - g q(t) = -F$

※ $g \approx 9.8$... 重力加速度

空想の始まり...

教員免許講習 機械工学 28

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Step1 (空想) ※F=0の場合

数式表現 $q'' - g q = -F = 0$

↓ 同じ係数の2次方程式

$s^2 - g = 0$

↓ 解の公式

$s_1 = -\sqrt{g}, s_2 = +\sqrt{g}$ 固有値という!

↓ 分類表と照合する

教員免許講習 機械工学 29

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Step2 (解釈) ※F=0の場合

$s_1 = -\sqrt{g}, s_2 = +\sqrt{g}$ 固有値

$\alpha + \beta i$
実部 虚部

分類表	虚部=0	虚部≠0
実部が全て(-)	減衰振動	発散振動
実部が0	一定値	単振動
実部が1つでも(+)	単調発散	発散振動

解釈

教員免許講習 機械工学 30

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Step3 (適用) ※F=0の場合

角度 q が発散

適用

現実

スイッチOFFのロボットは角度が発散

結論 → 倒れる!

教員免許講習 機械工学 31

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

「倒立安定化」のための空想

分類表	虚部=0	虚部≠0
実部が全て(-)	立つ! 単調減衰	立つ! 減衰振動
実部が0	変更できないか?!	
実部が1つでも(+)	単振動	発散振動

スイッチ OFF

答: 変更できる!

教員免許講習 機械工学 32

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

安定化の技術 — フィードバック制御

角度 q と角速度 q' に比例した力 $F = Kq + Lq'$ を加える!

制御力 F

角度 q

数式表現

$$q'' - gq = -F$$

$$F = Kq + Lq'$$

ふたたび空想...

教員免許講習 機械工学 33

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Step1 (空想) ※ $F = Kq + Lq'$ の場合

数式表現 $q'' - gq = -F = -Kq - Lq'$

移項して整理

$$q'' + Lq' - (g - K)q = 0$$

同じ係数の2次方程式

$$s^2 + Ls - (g - K) = 0$$

解の公式

固有値 $s_1, s_2 = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4(g - K)}}{2}$

教員免許講習 機械工学 34

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》2次方程式と複素数

- 虚数 $\dots i \equiv \sqrt{-1}$ ゆえに $i^2 = -1$ ←空想
 - $\square \sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot -1} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$
- 2次方程式 $s^2 + s + 1 = 0$ の解
 - $\square s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 解は一般に、複素数 $z = (\text{数}) \pm (\text{数})i$

教員免許講習 機械工学 35

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

固有値の数値例

$$s_1, s_2 = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4(g - K)}}{2}$$

$K, L \dots$ 角度, 角速度の倍率
 $g \dots$ 重力加速度 ≈ 9.8







- $K=20, L=9$
→ 固有値 $-1.33, -7.67$ 実部一だけ
- $K=20, L=5$
→ 固有値 $-0.25 \pm 1.99i$ 実部一, 虚部≠0

分類表と照合すると...

教員免許講習 機械工学 36

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

フィードバック制御ON のダイナミクス

分類表	虚部=0	虚部≠0
実部が全て(-)	単調減衰 	減衰振動 
実部が0	① $K=20, L=9$ 	② $K=20, L=5$ 
実部が1つでも(+)	OFF 	発散振動 

① 倒れ角が, 単調に $\rightarrow 0$. (単調に立つ)
 ② 振動しながら $\rightarrow 0$. (振動しながら立つ)

教員免許講習 機械工学 37

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

授業のまとめ

- 様々な動き方(時間変動)を, ダイナミクスと総称する.
- ダイナミクスを5種類に類別し, これらを模倣できるモデルを構成した.
- 離散時間のダイナミクスを, 等比数列の公比で分類した.
- 連続時間のダイナミクスを, 複素数(固有値)で分類し, 立位ロボットを複素数で設計した.

教員免許講習 機械工学 38