## 第 1 回 動的システム入門

# 平衡点と相軌道

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 自己紹介

## 宇都宮大学准教授　※栃木県の国立大学

- 機械システム工学科／機械知能工学専攻
- 担当授業：機械力学，機構学，ロボット力学


## 研究分野

- マルチヒューマンダイナミクス (手押し相撲)
- ロボティクス (対戦・協調ロボットシステム)
- 複雑系工学 (カオス，非線形制御)

# 学習目標

- **動的システム**
  - それが何か，短く説明できる．
  - 運動方程式を 1 階化して，状態方程式が作れる．
- **平衡点と安定性**
  - 状態方程式から，平衡点を計算できる．
  - 安定な平衡点と，不安定な平衡点を区別できる．
- **時間応答と相軌道**
  - それぞれの描き方が分かる．

# 動的システムとは？

- 時間変動する要素のあつまり．(自然物，人工物)

**ロボット，化学反応**

[動画再生]

**為替レート**

# 状態変数

- 状態変数 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 動的システムの状態を表す数ベクトル.

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \underset{\text{表記}}{\overset{\text{短縮}}{\Longleftrightarrow}} \quad \boldsymbol{x}(t) = [x_i(t)]$$

- その時間微分：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}^{\cdot} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad \underset{\text{表記}}{\overset{\text{短縮}}{\Longleftrightarrow}} \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) \equiv [\dot{x}_i(t)]$$

**例題**　状態量 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$ の時間微分 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ を求めよ.

# 解答例

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ e^{-3t} \end{bmatrix}^{\cdot} \equiv \begin{bmatrix} (\cos 2t)^{\cdot} \\ (\sin 2t)^{\cdot} \\ (e^{-3t})^{\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix} \quad /\!/$$

# 状態方程式

**定義**

状態 $\boldsymbol{x}(t)$ を解とする方程式．(1 階の微分方程式)

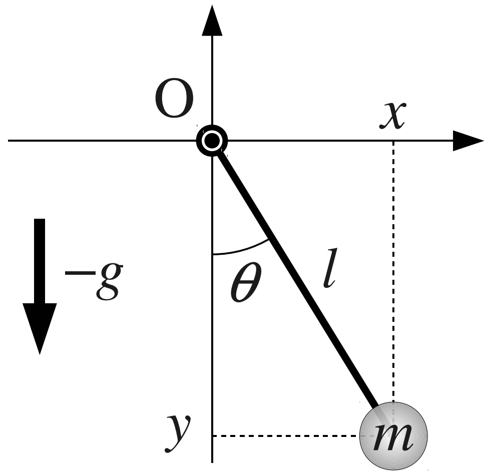
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

⇨ 解 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

**線形と非線形**

行列で書けるもの $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を**線形**，書けないものを**非線形**という．

# 単振り子 (動的システムの例)




$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\sin\theta = 0, \quad c = \gamma/(ml^2),\ k = g/l$$

☆ 2 階微分 $\ddot{\theta}$ があり，状態方程式と形が合わない！

# 単振り子の「1 階化」

**目標**

2 階 1 変数

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\sin\theta = 0$$

⇨

1 階 2 変数

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

- $x_1 \equiv \theta$, $x_2 \equiv \dot{\theta}$ とおく.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad \therefore \dot{x}_1 = x_2$$

- $\ddot{\theta} = (\dot{\theta})^{\cdot} = \dot{x}_2$ を使うと，単振り子の運動方程式は，

$$\dot{x}_2 + c\,x_2 + k\,\sin x_1 = 0 \quad \therefore \dot{x}_2 = -c\,x_2 - k\,\sin x_1$$

# 単振り子の「状態方程式」

- 得られた連立微分方程式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -c\,x_2 - k\,\sin x_1 \end{cases}$$

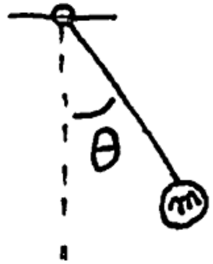
- 単振り子の状態方程式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -c\,x_2 - k\,\sin x_1 \end{bmatrix}$$

- 単振子の状態量：

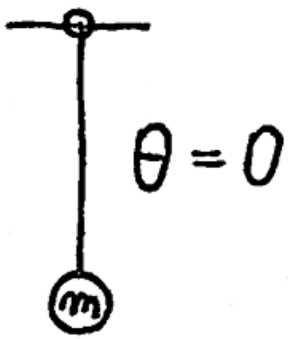
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

# 単振り子の「平衡点」



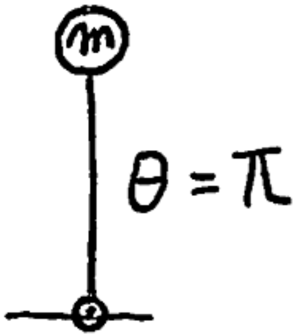

■ 平衡点 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ そこに置くと静止する点

■ 安定平衡点




■ ずれても復元する.

■ 不安定平衡点




■ ずれると復元しない.

☆ 単振り子には，安定，不安定の 2 つの平衡点がある.

# 平衡点の計算法


- **平衡点 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ そこに置くと <u>静止</u> する点**
  - 静止 $\Longrightarrow$ 速度 0　$\therefore\ \dot{\theta} = \dot{x}_1 = 0$
  - 速度 0 を保つ $\Longrightarrow$ 加速度 0　$\therefore\ \ddot{\theta} = \dot{x}_2 = 0$

**平衡条件**

状態変数の時間微分 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

**例題**　単振り子 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -c\,x_2 - k\ \sin x_1 \end{bmatrix}$ の平衡点を求めよ.

# 解答例

平衡条件 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -cx_2 - k\sin x_1 \end{bmatrix}$ より,

平衡点は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \cdots, \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots$ //

**実習 1**　**Code 1** を実行し，単振り子の安定平衡点と不安定平衡点を観察せよ．

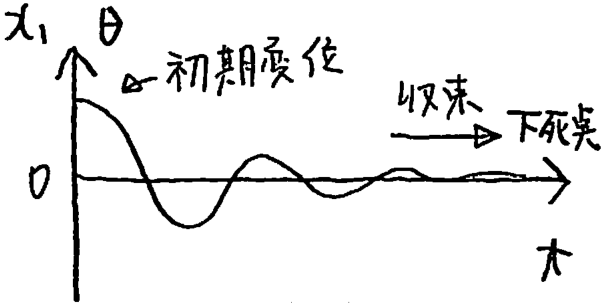
☆ 初期値 `x0` を `[0;0]` の付近にすれば安定平衡点 (下死点) まわりの挙動が観察できる．$[\pi;0]$ の付近にすれば不安定平衡点 (上死点) まわりの挙動となる．

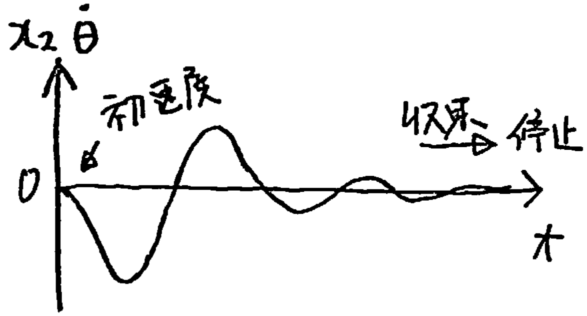
**動画**

安定平衡点近くの運動 [再生]
不安定平衡点近くの運動 [再生]

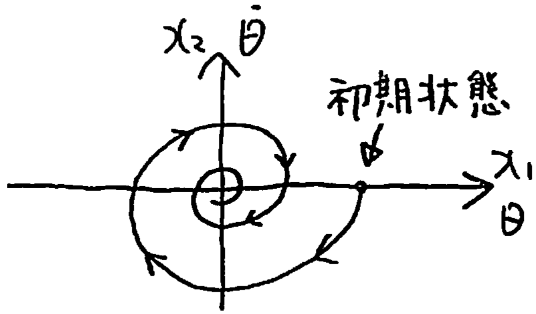
# 動的システムのグラフ — 時間応答と相軌道

■ 時間応答 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 状態変数の各成分の時間波形




■ 相軌道 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 状態変数の軌跡



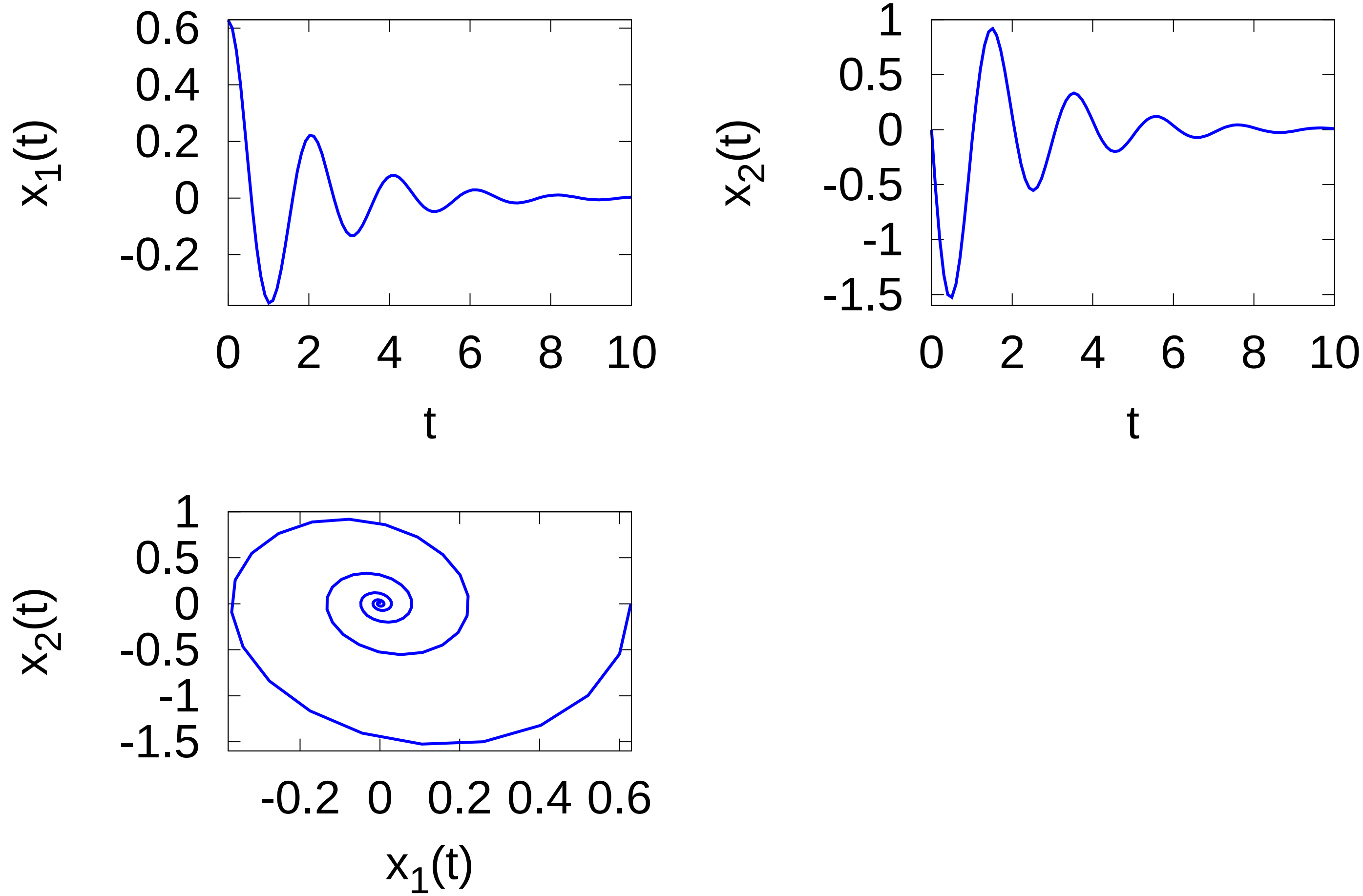
**実習 2　Code 1** の単振り子の運動について，角変位 $x_1(t)$ と角速度 $x_2(t)$ の時間応答と，相軌道 $\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ を観察せよ．

☆ **Code 1** の `for` から `endfor` までを，

```
subplot(2,2,1); plot(tt,xx(:,1));
xlabel("t"); ylabel("x_1(t)");
subplot(2,2,2); plot(tt,xx(:,2));
xlabel("t"); ylabel("x_2(t)");
subplot(2,2,3); plot(xx(:,1),xx(:,2));
xlabel("x_1(t)"); ylabel("x_2(t)");
```

に書き換えると，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の時間応答と，相軌道 $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ が観察できる．

# 実行例



0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0 2 4 6 8 10
t
x1(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10
t
x2(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.2 0 0.2 0.4 0.6
x1(t)
x2(t)

## 第 2 回 動的システム入門

# ベクトル場と線形化

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 学習目標

## ■ ベクトル場

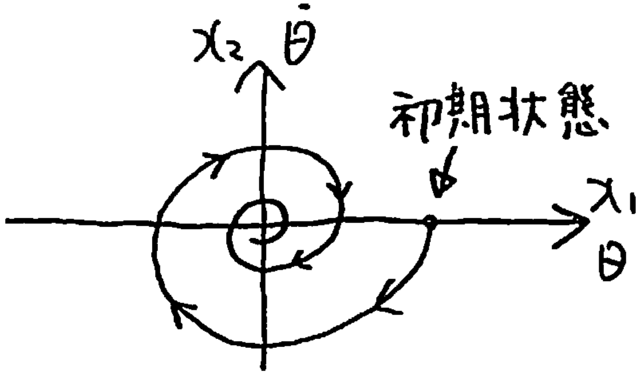
- 状態方程式のベクトル場が描ける．
- ベクトル場から相軌道を予測できる．
- ベクトル場から安定性を予測できる．

## ■ 線形化

- 状態方程式から，線形化方程式を導出できる．
- 線形化によって，ベクトル場がどう変るか説明できる．
- 線形化の限界を，ベクトル場で説明できる．

# (相軌道と平衡点)

## ■ 単振り子の相軌道




- 渦巻の中心に，安定平衡点がある．
- 初期状態を変えると，別の渦巻が得られる．

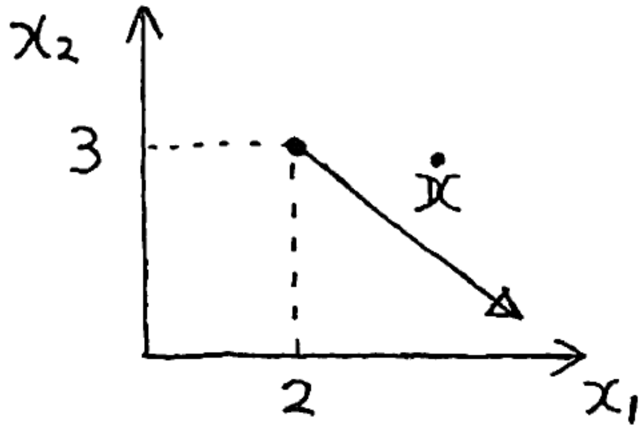
## ■ 見えない渦巻を全体視する作図法 ⇨ ベクトル場！

# ベクトル場の描き方

**1.** 状態方程式を「速度の定義式」とみる.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

($k = 1, c = 1/2$ とした)

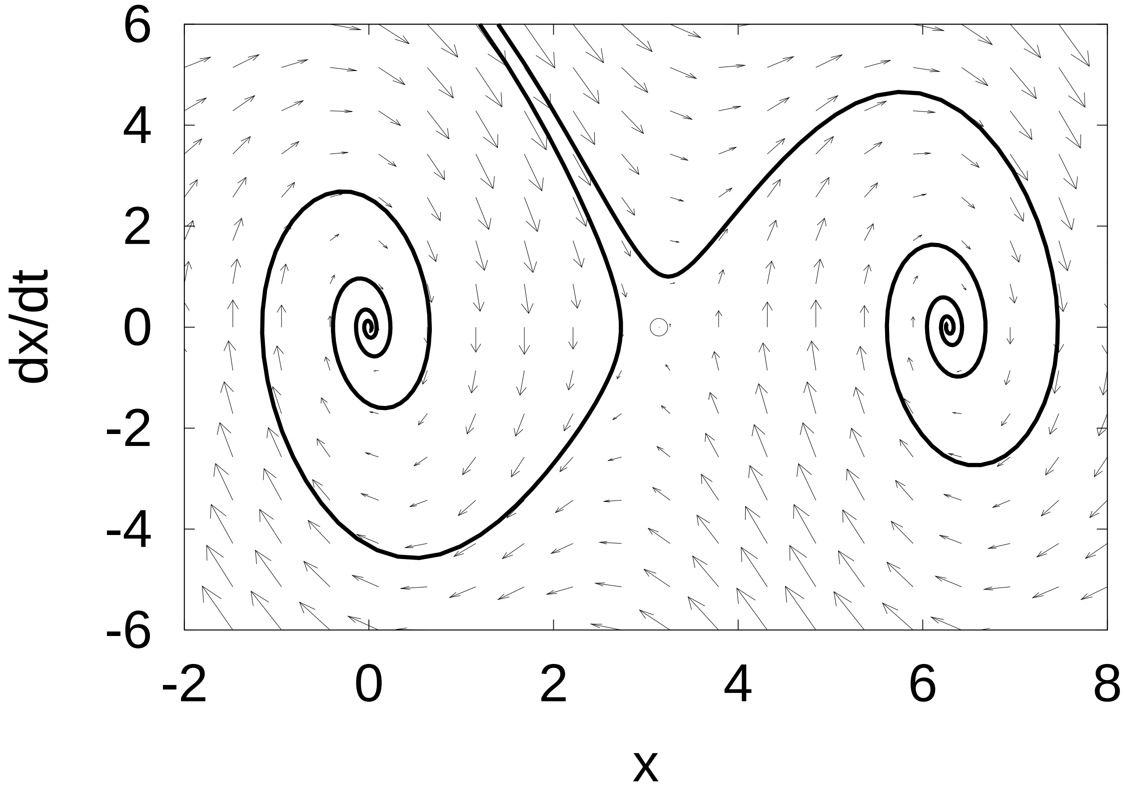



**2.** 位置 $\boldsymbol{x} = (2, 3)$ を代入する.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sin 2 - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -2.41 \end{bmatrix}$$

**3.** 得られた矢印 $\dot{\boldsymbol{x}}$ を，相空間の $\boldsymbol{x} = (2, 3)$ の位置に描く.

# 単振り子の「ベクトル場」

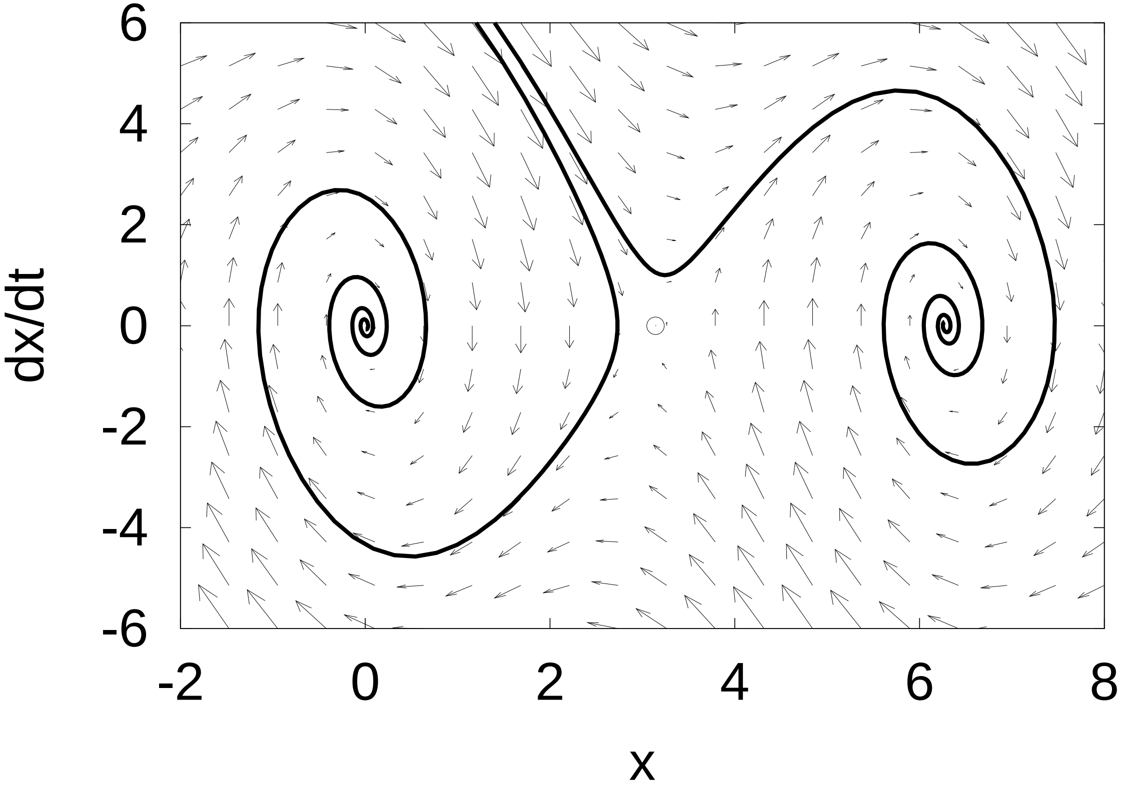



実線が
相軌道

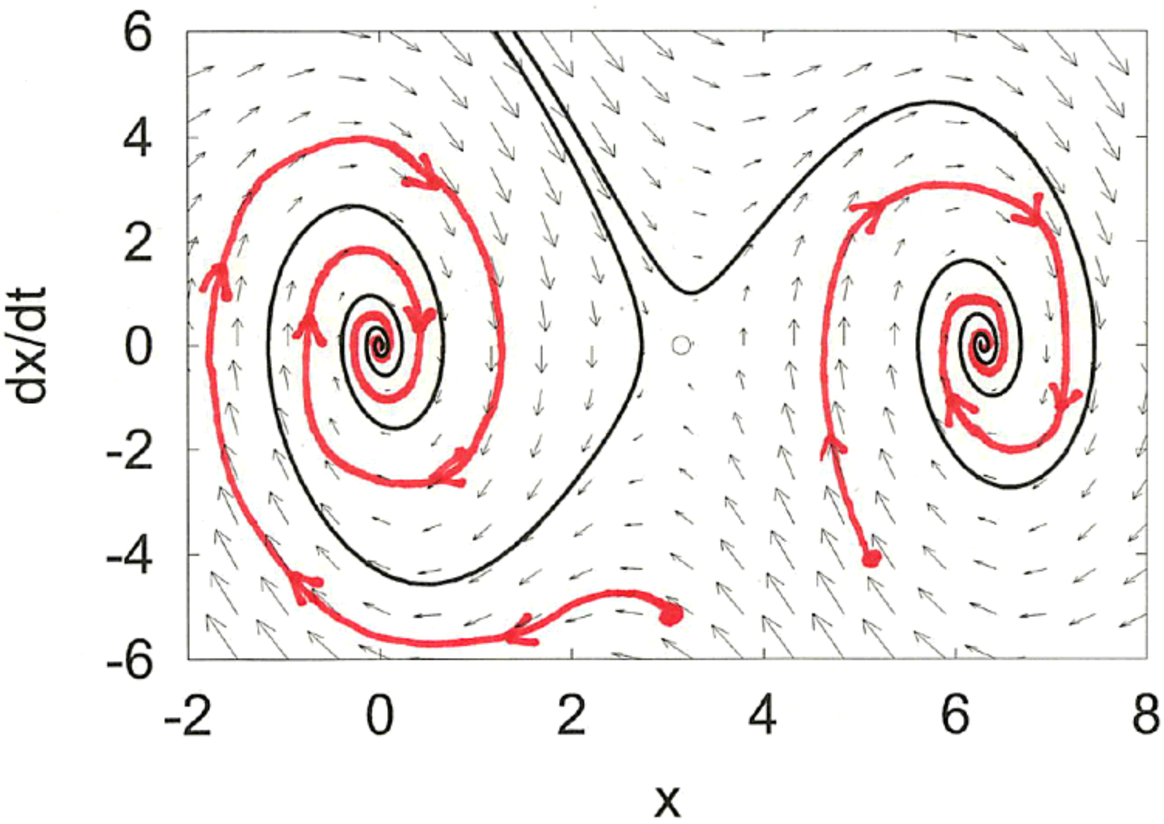
**ベクトル場の特徴 1**

相軌道は，ベクトル場の矢印をたどるように動く．

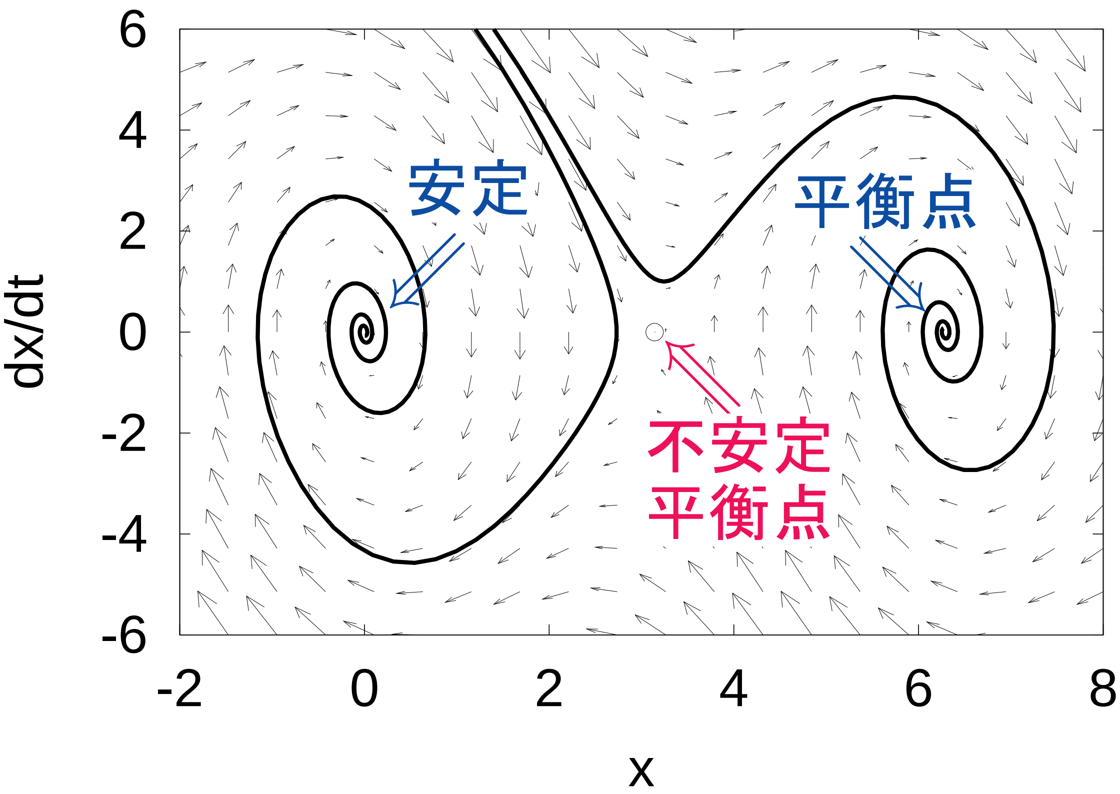
**実習 3**　ベクトル場の適当な場所にペン先を置き，矢印をたどりながら，そこを初期値とする相軌道を予想して描け.



# 解答例



# 単振り子の「ベクトル場」

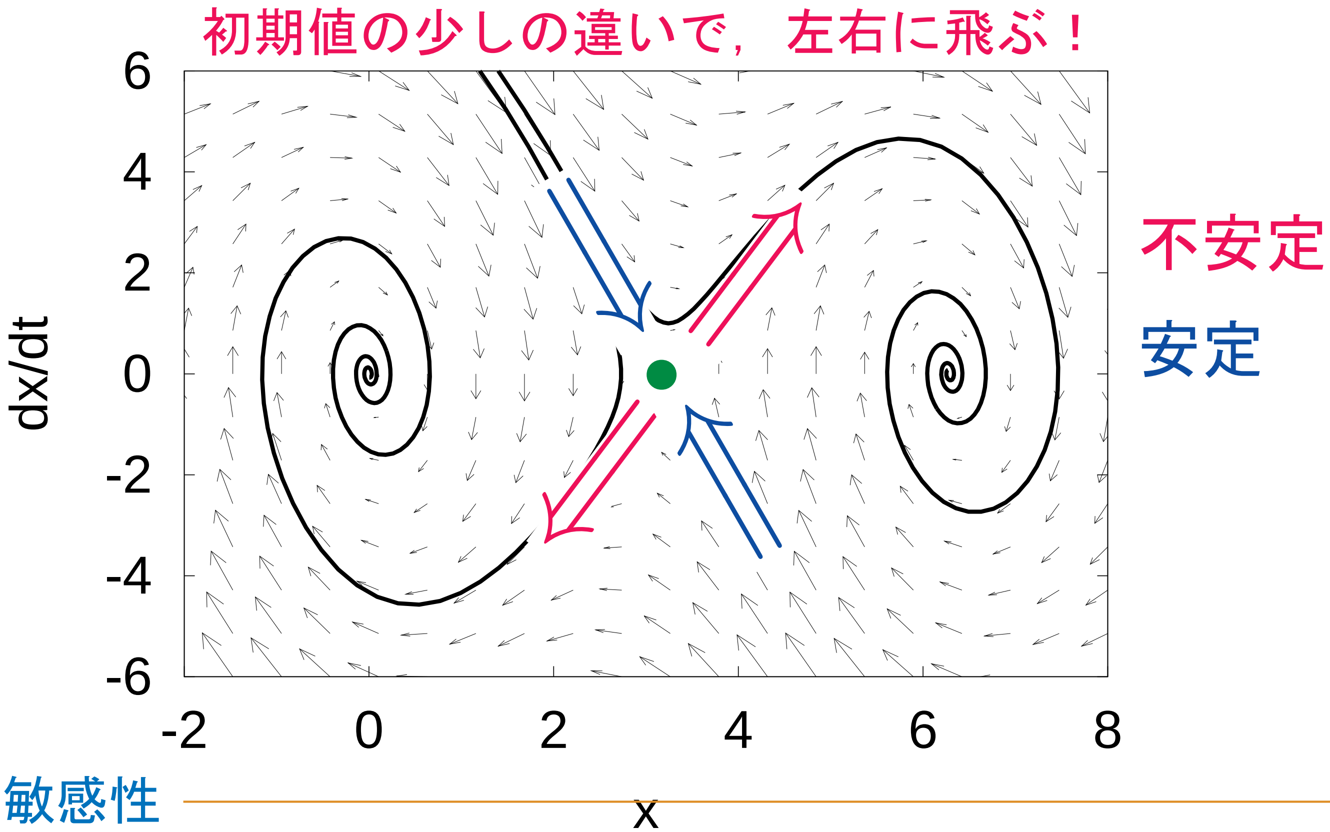



実線は
相軌道

**ベクトル場の特徴 2**

- 内向きの「流れ」の中心に，安定平衡点がある．
- 外向きの「流れ」の中心に，不安定平衡点がある．

# 初期値敏感性と鞍点




## 初期値敏感性

- 鞍点 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 安定と不安定がクロスした平衡点のこと．(上死点)
- 鞍点があると「初期値敏感性」が起る．

# 線形化とは？

**似せること！**

非線形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

⇨

線形化方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## 線形化のメリット ⇔ 非線形のデメリット

- 平衡点の安定性 (渦巻，鞍点，etc) を，行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の固有値から判別できる．(**3〜4 章**)
- 制御理論 (安定性の改変技術) の構築が簡単になる．(**5〜6 章**)

## 線形化のデメリット

- 線形化は所詮「他人の空似」．本人とは必ず食い違う．

# 単振り子の「線形化」— $(0,0)$ まわり

**よくある近似**

$x$ が小さければ，$\sin x \approx x$.

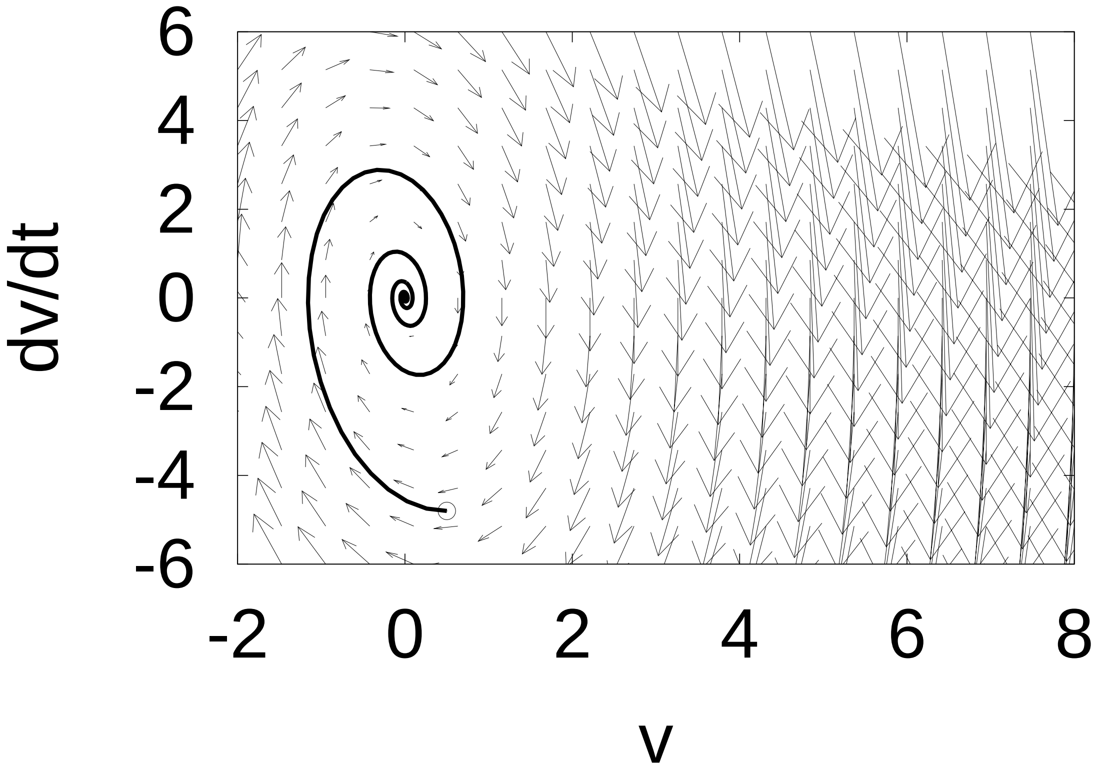
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k\ \sin x_1 - c\,x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ -k\,x_1 - c\,x_2 \end{bmatrix}$$

線形化⇩方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

小さい $x_i$ を
$v_i$ と書いた!

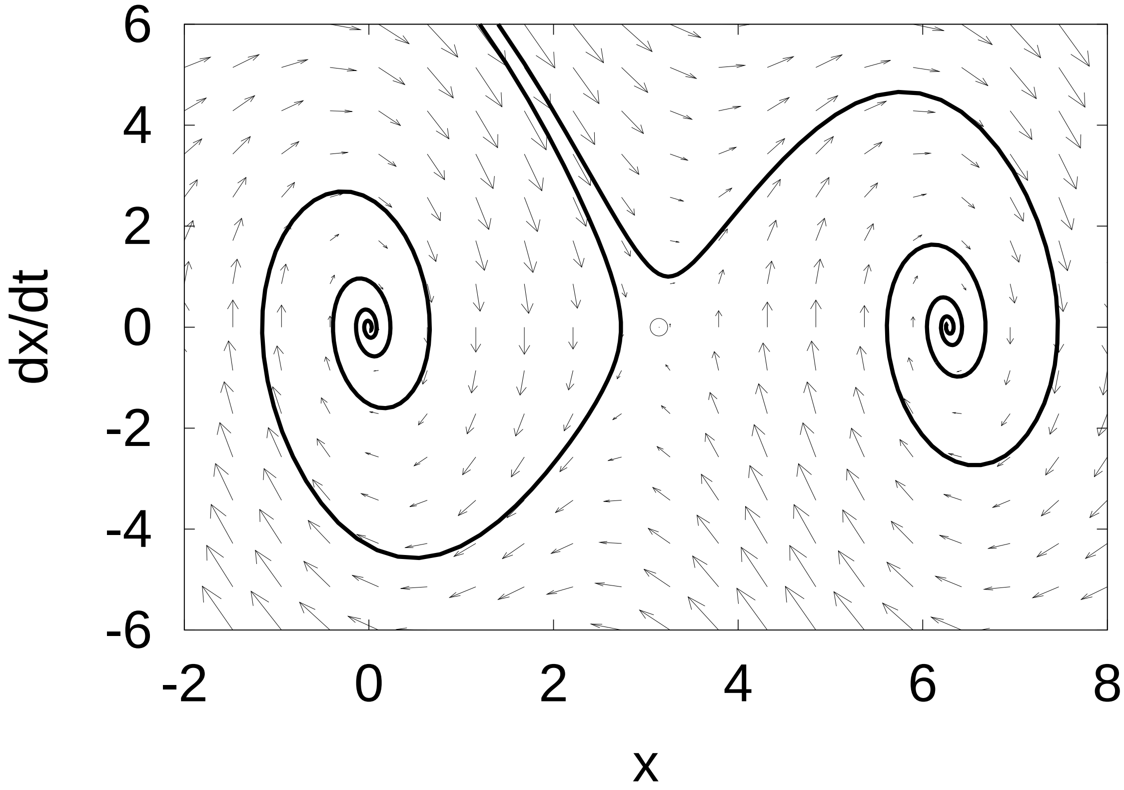
# 線形化ベクトル場 — $(0,0)$ まわり




実線は
相軌道

- 安定平衡点 $(0,0)$ 近くでは，そっくり！
- 線形化の誤差：中央部の「鞍点」と右の「渦巻」が消えた．

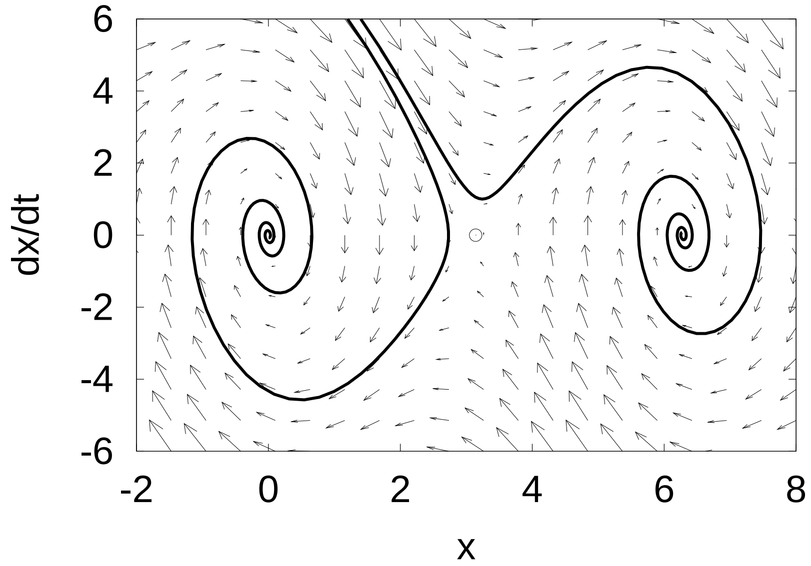
# (単振り子の「ベクトル場」)

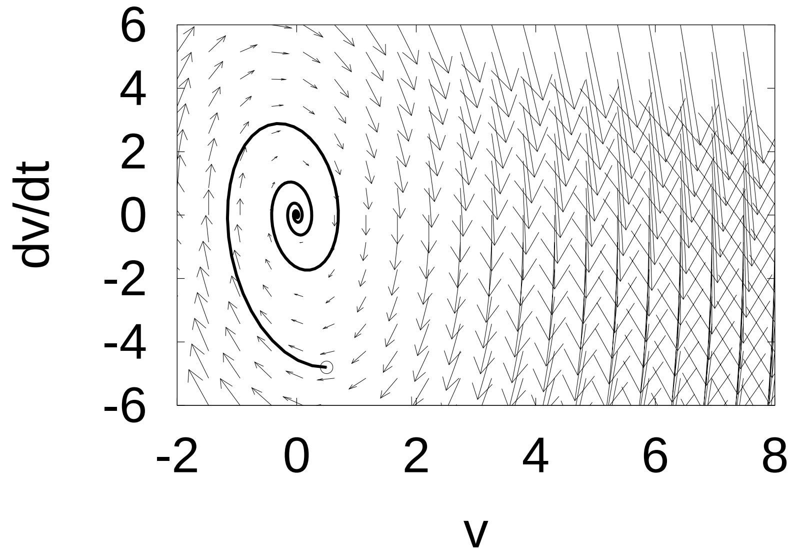



実線は
相軌道

# 線形化の限界

■ 線形化が信用できるのは，基準点の近くだけ！




⇨ 別の基準点にバトンタッチ！

# 単振り子の「線形化」— $(\pi, 0)$ まわり

**原点の平行移動**

$(\pi, 0)$ を原点とする状態量 $\boldsymbol{x}' \equiv \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} = (x_1 - \pi, x_2)$.

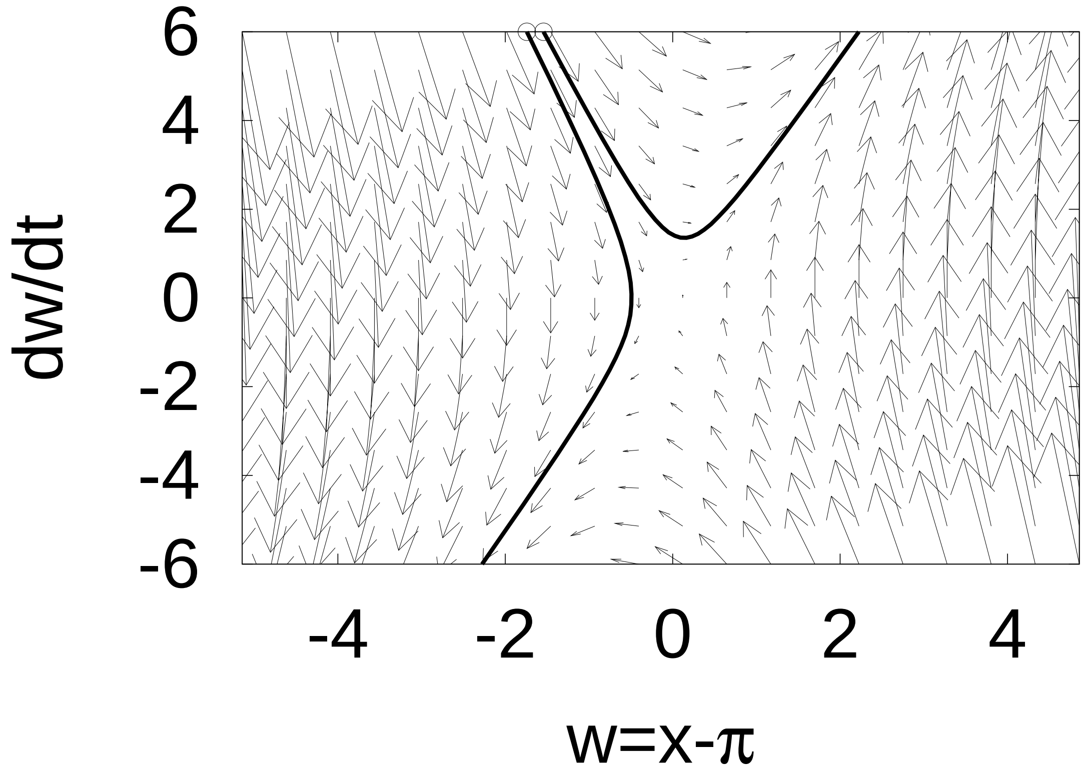
$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ -k\ \sin(x'_1 + \pi) - c\, x'_2 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} x'_2 \\ +k\ \sin x'_1 - c\, x'_2 \end{bmatrix}$$

線形化⇩方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

小さい $x'_i$ を $w_i$ と書いた!

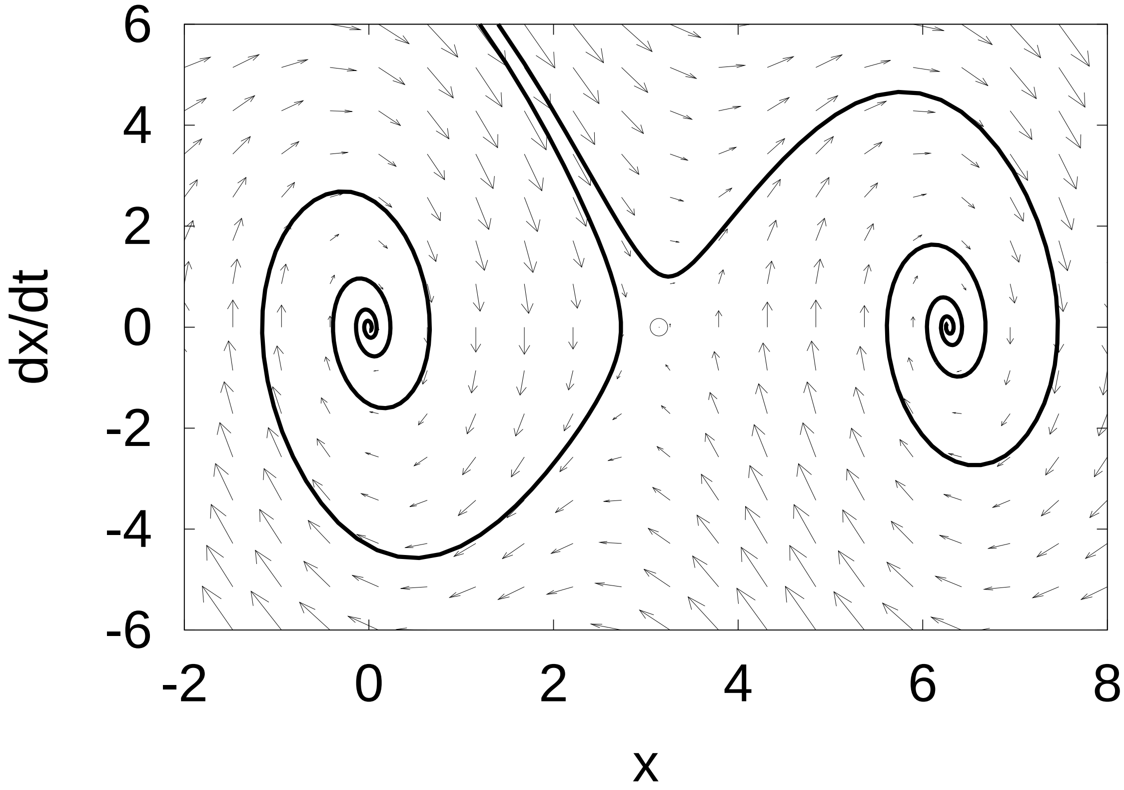
# 線形化ベクトル場 — $(\pi, 0)$ まわり




実線は
相軌道

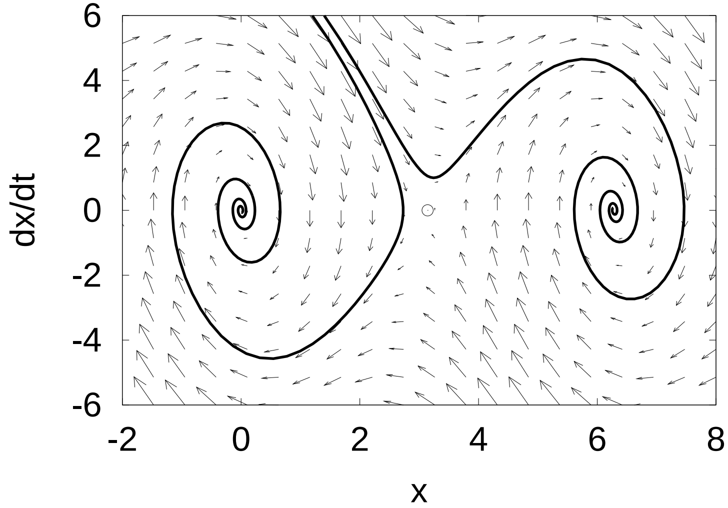
- 鞍点 $(\pi, 0)$ 近くでは，そっくり！
- 線形化の誤差：左右の「渦巻」が消えた．

# (単振り子の「ベクトル場」)

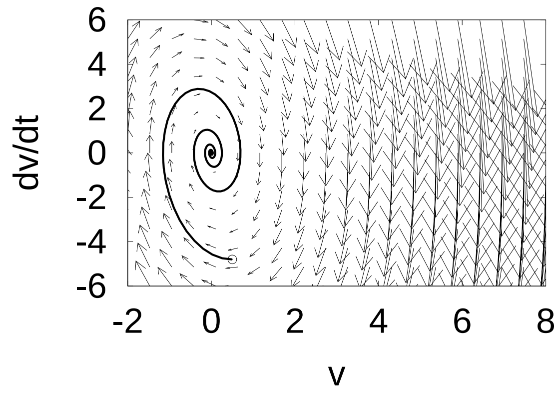


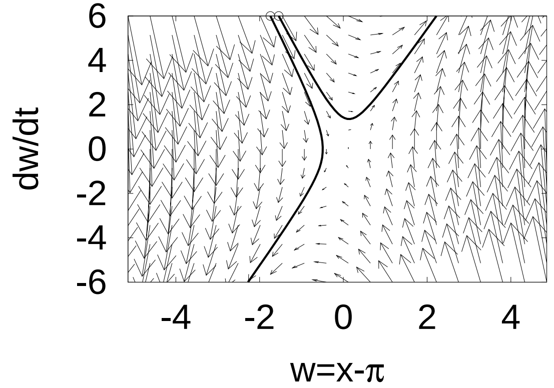

実線は
相軌道

# 線形化のまとめ




線形化 ⇨




## 線形化の教訓

- 線形化方程式は，平衡点の数だけ存在する．
- 線形化方程式は，対応する平衡点の近くでしか，信用できない．

## 第 3 回 動的システム入門

# 行列指数関数

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

# 学習目標

- 線形の状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ の解を数式表現する.
  - 指数関数を作る.
  - 同じ方法で，行列指数関数を作る.
  - 解 $\boldsymbol{x}(t)$ を表示する. ⇨ $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$
- 相軌道を $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ で描き，前回までと比較する.
- 推移行列を使って行列指数関数の値を求める.

# 初期値問題 (1 次元)

**定義**

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = c \quad (\text{定数})$$

⇩解法

**ピカールの逐次近似法**

次の公式に，関数列 $x_n(t)$ を繰り返し代入する．

$$x_{n+1}(t) = c + \int_0^t a x_n(\tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

得られた関数列 $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \cdots$ の極限が解 $x(t)$ となる．

# 逐次近似法の計算例 (1 次元)

- $x_0 = c$ (定数関数) を初項とする.
- $x_1(t) = c + \int_0^t ac\,d\tau = c + act$
- $x_2(t) = c + \int_0^t a(c + ac\tau)\,d\tau = c + act + a^2c\frac{t^2}{2}$
- $x_3(t) = c + \int_0^t a\left(c + ac\tau + a^2c\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau = c + act + a^2c\frac{t^2}{2} + a^3c\frac{t^3}{3\cdot 2}$

極限 ⇩ $n \to \infty$

- $x_\infty(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots\right)c$ //

## 無限級数解 (1 次元)

$$x_\infty(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots\right) c$$

- 初期値の検算：

$$x_\infty(0) = \left(1 + a0 + \frac{(a0)^2}{2!} + \frac{(a0)^3}{3!} + \frac{(a0)^4}{4!} + \cdots\right) c = c //$$

- 解であることの検算：

$$\dot{x}_\infty(t) = \left(0 + a + a^2 t + a\frac{a^3t^2}{2!} + \frac{a^4t^3}{3!} + \frac{a^5t^4}{4!} + \cdots\right) c$$

$$= a \underbrace{\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots\right) c}_{\text{終りが無いから } x_\infty(t) \text{ と区別できない}} = a\, x_\infty(t) //$$

$\therefore$ **無限級数 $x_\infty(t)$ は初期値問題 $\dot{x} = ax,\ x(0) = c$ の解！**

# 指数関数の導入と活用

**無限級数解**

$$x_\infty(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots\right) c$$

級数部分を ⇩ 抜き出す

**指数関数の定義**

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

⇩ 解の表示

**1 次元状態方程式の解**

初期値問題 $\dot{x} = ax,\ x(0) = c$ の解は $x(t) = e^{at}c$ と書ける.

# ベクトルの積分

## 定義 (全成分を同じ積分にさらすこと)

$$\int \boldsymbol{x}(\tau)d\tau \equiv \begin{bmatrix} \int x_1(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int x_n(\tau)d\tau \end{bmatrix} \underset{\text{表記}}{\overset{\text{短縮}}{\Longleftrightarrow}} \int [x_i(\tau)]d\tau \equiv \left[\int x_i(\tau)d\tau\right]$$

**例題**　ベクトル $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$ の積分 $\displaystyle\int_0^t \boldsymbol{x}(\tau)d\tau$ を求めよ.

# 解答例

$$\int_0^t \boldsymbol{x}(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \tau^2 \\ e^\tau \end{bmatrix} d\tau \equiv \begin{bmatrix} \int_0^t \tau^2 d\tau \\ \int_0^t e^\tau d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3/3 \\ e^t - 1 \end{bmatrix} /\!/$$

# 初期値問題 (n 次元)

**定義**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c} \quad (\text{定ベクトル})$$

⇩**解法**

**ピカールの逐次近似法**

次の公式に，ベクトル値関数列 $\boldsymbol{x}_n(t)$ を繰り返し代入する．

$$\boldsymbol{x}_{n+1}(t) = \boldsymbol{c} + \int_0^t A\boldsymbol{x}_n(\tau)d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

得られた関数列 $\boldsymbol{x}_0(t), \boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots$ の極限が解 $\boldsymbol{x}(t)$ となる．

# 逐次近似法の計算例 (n 次元)

- $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{c}$ (定ベクトル値関数) を初項とする.
- $\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{c} + \displaystyle\int_0^t A\boldsymbol{c}\, d\tau = \boldsymbol{c} + tA\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{c} + \displaystyle\int_0^t A(\boldsymbol{c} + \tau A\boldsymbol{c})\, d\tau = \boldsymbol{c} + tA\boldsymbol{c} + \frac{t^2}{2}A^2\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{x}_3(t) = \boldsymbol{c} + \displaystyle\int_0^t a\left(\boldsymbol{c} + \tau A\boldsymbol{c} + \frac{\tau^2}{2}A^2\boldsymbol{c}\right) d\tau = \boldsymbol{c} + tA\boldsymbol{c} + \frac{t^2}{2}A^2\boldsymbol{c} + \frac{t^3}{3\cdot 2}A^3\boldsymbol{c}$

極限 $\Downarrow$ $n \to \infty$

- $\boldsymbol{x}_\infty(t) = \left(I + tA + \dfrac{(tA)^2}{2!} + \dfrac{(tA)^3}{3!} + \dfrac{(tA)^4}{4!} + \cdots\right)\boldsymbol{c}$ //

## 無限級数解 ($n$ 次元)

$$\boldsymbol{x}_\infty(t) = \left( I + (tA) + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \cdots \right) \boldsymbol{c}$$

- 初期値の検算：

$$\boldsymbol{x}_\infty(0) = \left( I + 0A + \frac{(0A)^2}{2!} + \frac{(0A)^3}{3!} + \frac{(0A)^4}{4!} + \cdots \right) \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} /\!/$$

- 解であることの検算：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\infty(t) = \left( O + A + tA^2 + \frac{t^2A^3}{2!} + \frac{t^3A^4}{3!} + \frac{t^4A^5}{4!} + \cdots \right) \boldsymbol{c}$$

$$= A \underbrace{\left( I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \cdots \right)}_{\text{終りが無いから } \boldsymbol{x}_\infty(t) \text{ と区別できない}} \boldsymbol{c} = A\boldsymbol{x}_\infty(t) /\!/$$

$\therefore$ **無限級数 $\boldsymbol{x}_\infty(t)$ は初期値問題 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ の解！**

# 行列指数関数の導入と活用

### 無限級数解 ($n$ 次元)

$$\boldsymbol{x}_\infty(t) = \left( I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \cdots \right) \boldsymbol{c}$$

級数部分を ⇩ 抜き出す

### 行列指数関数の定義

$$e^X \equiv I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \cdots \quad (X \text{ は行列})$$

解の表示 ⇩ 制御工学の表記：$At \equiv tA$

### $n$ 次元状態方程式の解

初期値問題 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ の解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{c}$ と書ける.

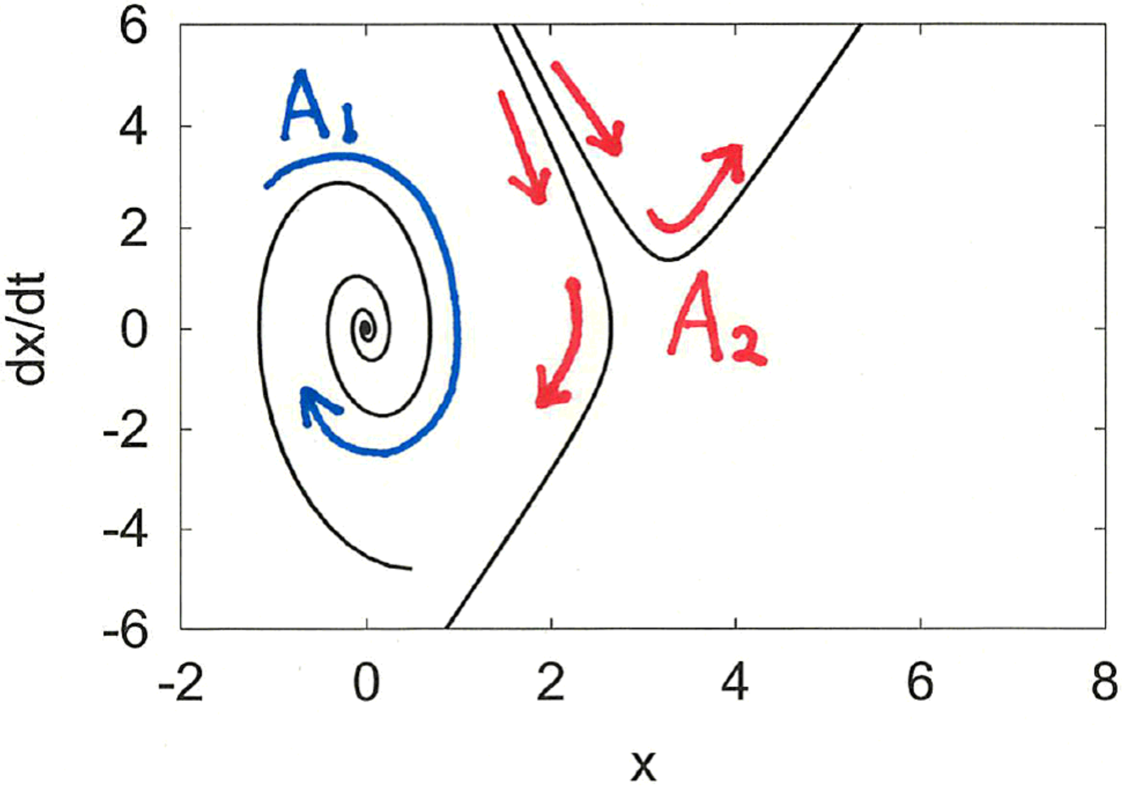
**実習 4**　状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ の軌道 $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$ を，次の行列について求めよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & -1 \end{bmatrix}$$

初期値を前回の線形化ベクトル場と合せると，同じ軌道が得られる．

# 解答例

**Code 5** を実行すると，前回の線形化ベクトル場と同じ軌道が得られる.



# 推移行列

## 時間原点のシフト：

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) = e^{A(t-t_0+t_0)}\boldsymbol{x}(0) = e^{A(t-t_0)}e^{At_0}\boldsymbol{x}(0)$$

$$= \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{\Phi(t,t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

### 推移行列

時刻 $t_0$ から $t$ までの，相軌道の変位を表す行列 $\Phi(t,t_0) \equiv e^{A(t-t_0)}$

### 推移行列の性質

推移行列は状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ と同じ形の方程式を満足する．

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A\Phi(t,t_0) \qquad (t_0\text{ は定数})$$

# 行列指数関数の数値解法

■ 推移行列の性質より，行列微分方程式，

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I \quad (単位行列)$$

の $t = 1$ における解 $\Phi(1)$ は，$e^A$ と一致する．

**実習 5**　**Code 6** を実行せよ．行列微分方程式による数値解と，組み込みの行列指数関数が比較できる．

# 解答例

次のような結果が得られる．確かに一致している．

```
octave:1> source "expAt2.m"
Xmat =
  -0.600702   0.010061
  -0.098601  -0.610764
ans =
  -0.600702   0.010061
  -0.098601  -0.610764
```

## 第 4 回 動的システム入門

# 安定判別

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 学習目標

- **固有値・固有ベクトル**
  - 行列の固有値が求められる.
  - 行列指数関数 (行列) の固有値が求められる.
- **状態方程式の固有値を見て，判定判別ができる.**
  - 実固有値の場合.
  - 複素固有値の場合.
  - 多次元の場合.

# 固有値・固有ベクトル

**定義**

行列 $A$ に関する等式,

$$A\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$$

において，係数 $s$ を**固有値**，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を**固有ベクトル**という.

## 固有値の求め方

1. **固有方程式** $|A - sI| = 0$ を解き，固有値 $s_1, \cdots, s_n$ を求める.
2. 各 $s = s_i$ を $A\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}$ に代入し，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i \neq 0$ の方向を求める.

☆ 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の長さは定まらないので勝手に決めてよい.

**例題**　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ.

# 解答例

- $$\left|\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} - s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}0-s & 1\\ -2 & -3-s\end{vmatrix} = s^2+3s+2=0$$

$$\therefore\ \text{固有値は}\ s=-1,-2\ /\!/$$

- 1 つ目の固有値 $s=s_1=-1$ を $A\boldsymbol{v}=s\boldsymbol{v}$ に代入すると,

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_2\\ -2v_1-3v_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow v_1+v_2=0$$

$$\therefore\ \text{固有ベクトルの方向は}\ \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}/\!/$$

- 2 つ目の固有値 $s=s_2=-2$ を $A\boldsymbol{v}=s\boldsymbol{v}$ に代入すると,

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_2\\ -2v_1-3v_2\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow 2v_1+v_2=0$$

$$\therefore\ \text{固有ベクトルの方向は}\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}/\!/$$

# 固有ベクトルが作る基底

**本講義の仮定**

講義に出てくる行列 $A$ の固有値は重複しない.

⇩ **このとき**

**定理**

固有ベクトルの組 $\mathcal{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は, $n$ 次元空間の**基底**となる.

☆ $\mathcal{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が基底とは?

1. どんなベクトル $\boldsymbol{x}$ も, $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ と書ける.
2. その係数 $a_1, \cdots, a_n$ の定まり方が, 各 $\boldsymbol{x}$ につき一通り.

# 行列指数関数の固有値

**算法 4.2**

行列 $A$ の固有値が $s$ のとき，行列 $e^A$ の固有値は $e^s$ となる．固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は共通．すなわち，

$$\underbrace{A}_{\text{行列}}\,\boldsymbol{v} = \underbrace{s}_{\text{固有値}}\,\boldsymbol{v} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{e^A}_{\text{行列}}\,\boldsymbol{v} = \underbrace{e^s}_{\text{固有値}}\,\boldsymbol{v}$$

$A$ の定数倍 $At$ についても同様に，$e^{At}\boldsymbol{v} = e^{st}\boldsymbol{v}$ となる．

☆ これを使うと，状態方程式の「安定判別」が簡単にできる！

# 解のモード展開

**$\dot{x} = Ax$ の解**

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$$

簡単のため 2 次元で考える.

- $A$ の固有値 $s_1, s_2$, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ をとる.
- 初期値を固有ベクトルで $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ と表す. $\because \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は基底
- 解に代入し, 行列指数関数 $e^{At}$ を, **算法 4.2** で消去する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= e^{At}\boldsymbol{c} = e^{At}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1(e^{At}\boldsymbol{v}_1) + c_2(e^{At}\boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1(e^{s_1 t}\boldsymbol{v}_1) + c_2(e^{s_2 t}\boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

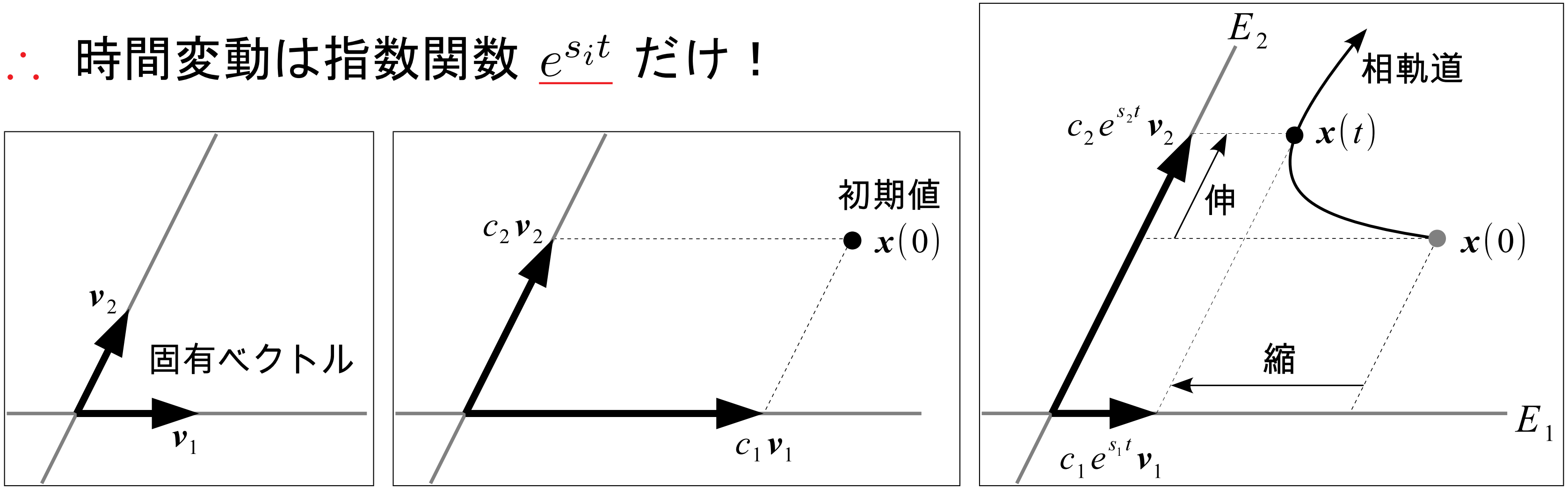
- $\therefore\ \boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{s_1 t}\boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{s_2 t}\boldsymbol{v}_2 \,/\!\!/$ ⇦ 「**モード展開**」という.

# 実固有値の安定性

## $\dot{x} = Ax$ の解のモード展開

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, \underline{e^{s_1 t}}\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \underline{e^{s_2 t}}\, \boldsymbol{v}_2$$

$\therefore$ 時間変動は指数関数 $\underline{e^{s_i t}}$ だけ！




**(a)** 固有ベクトル　**(b)** 初期値　**(c)** $E_1, E_2$ 方向の伸縮

## 指数関数の増減

- $s < 0 \implies e^{st} \to 0 \quad (t \to \infty)$　収束，安定
- $s > 0 \implies e^{st} \to \infty \quad (t \to \infty)$　発散，不安定

# 表 4.1 安定判別 (実固有値，2 次元)

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, \underline{e^{s_1 t}}\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \underline{e^{s_2 t}}\, \boldsymbol{v}_2$$

$$s_1 \;\Downarrow\; s_2$$

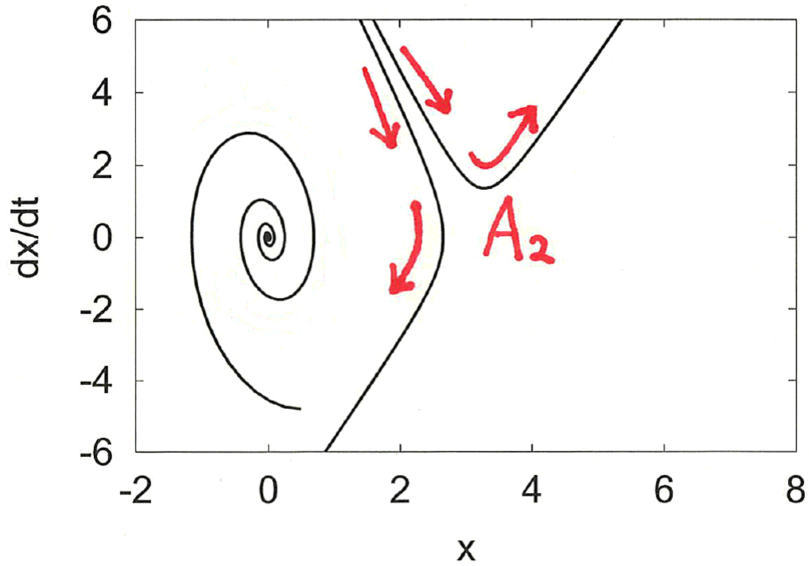
| 固有値の符号 | 解挙動 ($t \to \infty$) | 分類名 |
|---|---|---|
| $s_1,\ s_2 < 0$ | $\boldsymbol{x}(t) \to 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ | 安定結節点 |
| $0 < s_1,\ s_2$ | $\boldsymbol{x}(t) \to \infty\boldsymbol{v}_1 + \infty\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\infty}$ | 不安定結節点 |
| $s_1 < 0 < s_2$ | $\boldsymbol{x}(t) \to 0\boldsymbol{v}_1 + \infty\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\infty}$ | 鞍点 |

**実習 6**　**実習 4** の行列 $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を求め，上の表で分類せよ.

# 解答例

Octave で固有値を求めると，

```
octave:1> A2=[0,1;9.8,-1]
A2 =
   0.00000   1.00000
   9.80000  -1.00000
octave:2> eig(A2)
ans =
   2.6702
  -3.6702
```




より，$-3.6702 < 0 < 2.6702$ なので，鞍点に判別される．**実習 4** の実行例でも，中央に向いながら左右に飛される鞍点特有の軌道が見てとれる．

# 複素共役と実数化

1. 複素数 $z = a + ib$ と共役 $\overline{z} = a - ib$.  $(i = \sqrt{-1})$
2. 複素ベクトル $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ と共役 $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}$.
3. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と共役 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

   指数関数の共役 $\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$.
4. 積の共役 $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$,  スカラ倍の共役 $\overline{a\boldsymbol{b}} = \overline{a}\,\overline{\boldsymbol{b}}$.
5. 実部 $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{a}$.  虚部 $\mathrm{Im}\{\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{b}$.

**実数化**

6. 共役の和は実数 (ベクトル) $\boldsymbol{z} + \overline{\boldsymbol{z}} = 2\,\mathrm{Re}\{\boldsymbol{z}\}$.

# 複素固有値の解

**$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ の解**

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, \underline{e^{s_1 t}}\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \underline{e^{s_2 t}}\, \boldsymbol{v}_2$$

**定理**

実行列の複素固有値は，必ず，共役の対で表れる．

- $A$ の固有値を，複素共役 $s_1 = s, s_2 = \bar{s}$ とする．($s$ は複素数)
  - ⇨ 固有ベクトルも複素共役 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}$. ($\boldsymbol{v}$ は複素ベクトル)
  - ⇨ 初期値の係数も複素共役 $c_1 = c, c_2 = \bar{c}$. ($c$ は複素数)
- $\boldsymbol{x}(t) = c\, e^{st}\, \boldsymbol{v} + \bar{c}\, \overline{e^{s_2 t}}\, \bar{\boldsymbol{v}} \quad = c\, e^{st}\, \boldsymbol{v} + \overline{c\, e^{st}\, \boldsymbol{v}} \quad = 2\,\mathrm{Re}\{c\, e^{st}\, \boldsymbol{v}\}$
- $c = a + ib$, $s = \gamma + i\omega$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{w}$ として計算すると，

$$\boldsymbol{x}(t) = 2\,\mathrm{Re}\{c\, e^{st}\, \boldsymbol{v}\} = 2e^{\gamma t}\big\{\cos\omega t(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{w}) - \sin\omega t(a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{u})\big\} \;/\!/$$

# 歪んだ楕円軌道

**複素固有値 $\gamma \pm i\omega$ の解**

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t}\{\underline{\cos\omega t\,\boldsymbol{U}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{U}_2}\}$$

ただし，$\boldsymbol{U}_1 = 2(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{U}_2 = -2(a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{u})$ は定ベクトル

⇩

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t}\{\underbrace{\cos\omega t\,\boldsymbol{U}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{U}_2}_{\text{歪んだ楕円軌道}}\}$$

- **複素固有値の解は,**
  - 歪んだ楕円軌道を描く．角振動数は $\omega$ (固有値の虚部).
  - その振幅が指数関数的に**増大** ($\gamma > 0$) or **縮小** ($\gamma < 0$) する.

# 表 4.2 安定判別 (複素固有値 $\gamma \pm i\omega$，2 次元)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t}\{\cos\omega t\,\boldsymbol{U}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{U}_2\}$$

$\gamma \Downarrow \omega$

| 固有値実部の符号 | 分類名 |
|---|---|
| $\gamma < 0$ | 安定渦状点 |
| $\gamma > 0$ | 不安定渦状点 |
| $\gamma = 0$ | 渦心点　　※単振動 |

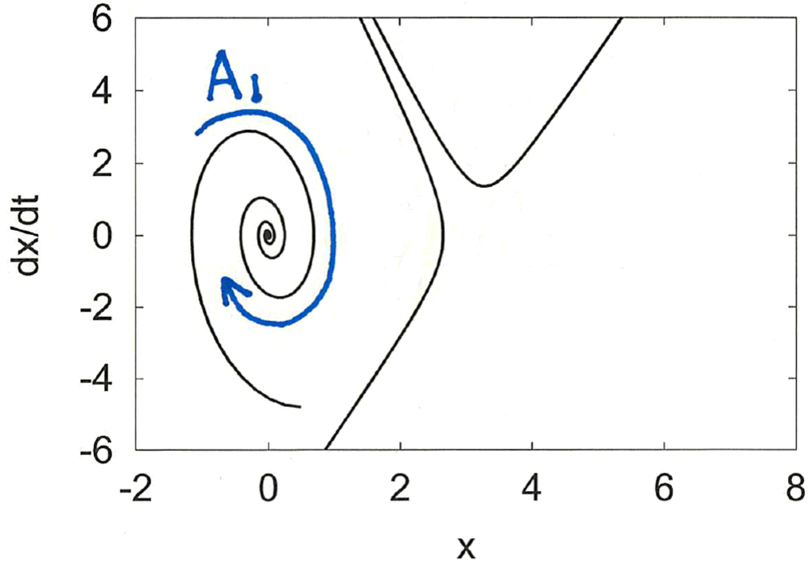
固有値虚部 $\omega$ は，楕円軌道 $\boldsymbol{U}(\omega t)$ の角振動数

**実習 7**　**実習 4** の行列 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を求め，上の表で分類せよ.

# 解答例

Octave で固有値を求めると，

```
octave:1> A1=[0,1;-9.8,-1]
A1 =
   0.00000   1.00000
  -9.80000  -1.00000
octave:2> eig(A1)
ans =
  -0.5000 + 3.0903i
  -0.5000 - 3.0903i
```




より，複素固有値で実部が負なので，安定渦状点に判別される．**実習 4** の実行例でも，原点に収束する渦巻が見てとれる．この渦巻運動の角振動数は $\approx 3.0903$ である．

# 多次元の場合

$n$ 次元のモード展開

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\, e^{s_1 t}\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, e^{s_2 t}\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\, e^{s_n t}\, \boldsymbol{v}_n$$

⇩ 複素固有値があれば

共役なペアが実数化 (楕円軌道)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \quad \cdots + \ c_k e^{s_k t} \boldsymbol{v}_k + \overline{c_k e^{s_k t} \boldsymbol{v}_k} \ + \cdots \\ &= \quad \cdots + \ e^{\gamma_k t} \big\{ \text{楕円軌道} \big\} \ + \cdots \end{aligned}$$

それだけ！

# 多次元の安定判別

- 固有値の実部が，1つでも $> 0$ ⇨ 発散，不安定！

$$\because \quad \boldsymbol{x}(t) = \cdots + c_k e^{(\text{正})t} \boldsymbol{v}_k + \cdots$$

$$\text{or } \boldsymbol{x}(t) = \cdots + e^{(\text{正})t} \{\text{楕円軌道}\} + \cdots$$

- 固有値の虚部が，1つでも $\neq 0$ ⇨ 楕円軌道

⇨ 振動，オーバーシュート！

**オーバーシュート**

目標地点を，いったん行き過ぎてしまうこと．クレーンに吊り下げられた，荷物の動き．

# 第 5 回 動的システム入門

## 対角正準形

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 学習目標

- **直交成分と斜交成分**
  - ベクトルの成分とは「寸法」である．寸法の測り方で成分は変化する．
- **基底変換行列**
  - 直交成分と斜交成分の関係式を導く．
- **線形変換の対角化**
  - 線形変換を対角行列で表す．
- **状態方程式の対角化**
  - 状態方程式を対角行列で表す．

# 列ベクトル

## 定義

行列 $A$ の各列のこと．すなわち，

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\boldsymbol{u}}{\boxed{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}}} & \overset{\boldsymbol{v}}{\boxed{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}}} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$$

の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を**列ベクトル**という．

## 便利な式変形

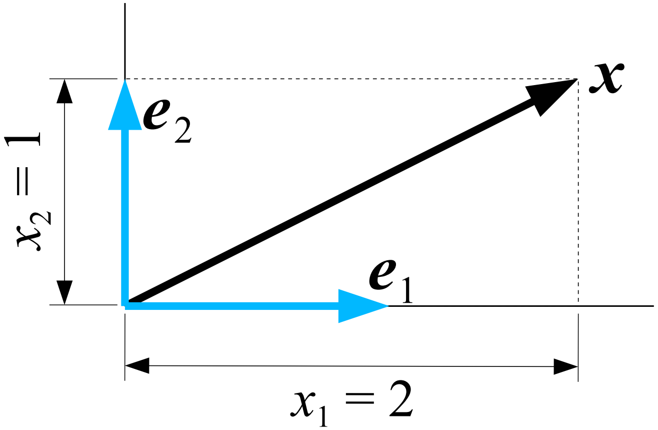
$$x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1u_1 + x_2v_1 \\ x_1u_2 + x_2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# ベクトル $\boldsymbol{x}$ の直交成分

**定義**

ベクトル $\boldsymbol{x}$ の「縦」「横」の寸法 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を，**直交成分**という．

■ **例**：




$$\Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} //$$

**直交成分の特殊性**

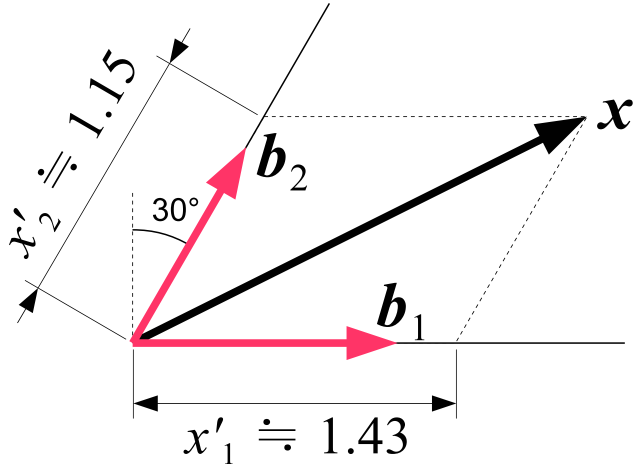
$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$　(ベクトルの直交成分はベクトルそのもの)

# ベクトル $\boldsymbol{x}$ の斜交成分

**定義**

ベクトル $\boldsymbol{x}$ を対角線とする平行四辺形の寸法 $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ を，**斜交成分**という．

■ **例：**



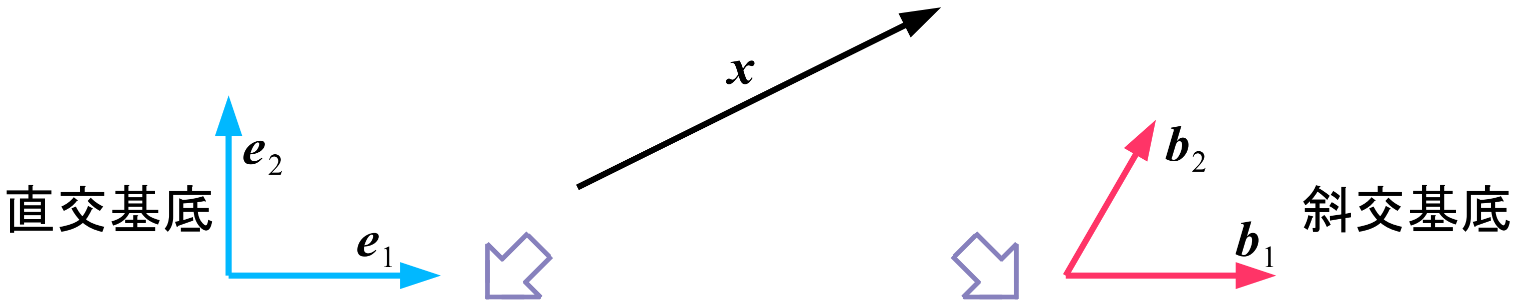

$$\Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix} \quad //$$

**ベクトル $\boldsymbol{x}$ が同じでも**

$$(\text{直交成分})\ \widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \quad \neq \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}'\ (\text{斜交成分}) \quad \neq \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}''\ (\text{別の斜交成分})$$

# 基底変換行列

## 目標




直交成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⇨変換？ 斜交成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \quad \boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{b}_1 + x_2'\boldsymbol{b}_2 = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad \equiv T\widetilde{\boldsymbol{x}}'$$

### 直交成分と斜交成分の関係

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = T\widetilde{\boldsymbol{x}}' \quad \text{または} \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}' = T^{-1}\widetilde{\boldsymbol{x}} \qquad (\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x})$$

$T = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ を**基底変換行列**という． $n$ 次元なら $T = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$.

**例題**　斜交成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = T^{-1}\widetilde{\boldsymbol{x}}$, $T = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ を計算し，右図の実測値と比較せよ．ただし，$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ である．


$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

# 解答例

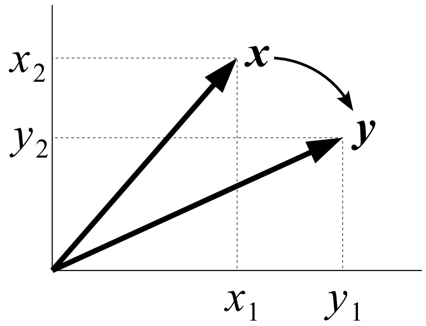
基底変換行列 $T = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ より，

$$\boldsymbol{x}' = T^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.16 \end{bmatrix} \approx \text{実測値} \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

となる．実測値のほうに測定誤差がある．

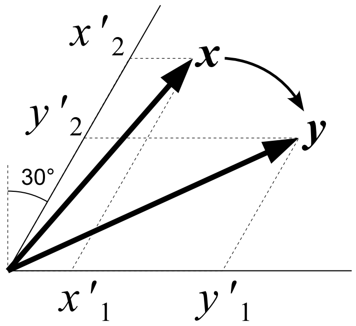
# 線形変換と行列




$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

直交成分の変換

同じ変換 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ でも，成分のとり方で行列は変わる




$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

斜交成分の変換

## 相似な行列

同じ変換を表す $A$ と $A'$ を「相似」という．

# $A$ と $A'$ の関係

- 直交成分 $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ と斜交成分 $\tilde{\boldsymbol{x}}', \tilde{\boldsymbol{y}}'$ の関係：

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = T\tilde{\boldsymbol{x}}', \quad \tilde{\boldsymbol{y}} = T\tilde{\boldsymbol{y}}', \quad T = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$$

- 線形変換 $\tilde{\boldsymbol{y}} = A\tilde{\boldsymbol{x}}$ へ代入すると，

$$T\tilde{\boldsymbol{y}}' = \tilde{\boldsymbol{y}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} = AT\tilde{\boldsymbol{x}}' \qquad \therefore\ \tilde{\boldsymbol{y}}' = \overbrace{T^{-1}AT}^{A'}\tilde{\boldsymbol{x}}'$$

**補足**

線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の作用 (動き) は，斜交成分では，

$$\tilde{\boldsymbol{y}}' = A'\tilde{\boldsymbol{x}}', \quad A' \equiv T^{-1}AT$$

と表せる．$T$ は基底変換行列である．

# 線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の対角化 (2 次元)

■ 斜交基底 $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ を，行列 $A$ の固有ベクトルにとる．

$$A\boldsymbol{b}_i = s_i \boldsymbol{b}_i$$

■ このとき，線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の斜交成分表示 $\tilde{\boldsymbol{y}}' = A'\tilde{\boldsymbol{x}}'$ は,

$$\begin{aligned}
A' &= T^{-1}AT = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]^{-1} A [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]^{-1} [A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2] \\
&= [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]^{-1} [s_1\boldsymbol{b}_1, s_2\boldsymbol{b}_2] \quad \because \text{固有ベクトル} \\
&= \underbrace{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]^{-1} [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]}_{\text{単位行列 } I} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad \because \text{便利な式変形} \\
&= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad \therefore A' = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} /\!/ \ \underset{\text{表記}}{\overset{\text{短縮}}{=}} \ \mathrm{diag}\{s_1, s_2\}
\end{aligned}$$

# 線形変換 $y = Ax$ の対角化 ($n$ 次元)

**定理**

行列 $A$ の固有ベクトルで斜交基底を構成すると，$A$ の斜交成分表示は，固有値を並べた対角行列になる．

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} s_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & s_n \end{bmatrix} \overset{\text{短縮}}{\underset{\text{表記}}{=}} \mathrm{diag}\left\{s_1, \cdots, s_n\right\}$$

**例題**　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ を対角化せよ．

# 解答例

第 3 回の例題で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ より，基底変換行列を $T = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} //$$

確かに，固有値 $s = -1, -2$ を並べた**対角行列**が得られる．

# 状態方程式の対角化

- $n$ 次元状態方程式　$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$
- $A$ の固有ベクトル　$A\boldsymbol{v}_k = s_k\boldsymbol{v}_k$
- 基底 $\mathcal{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ による斜交成分 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$
- その時間微分 $\dot{\boldsymbol{x}} = T\dot{\boldsymbol{y}}$
- 斜交成分で表した状態方程式

$$T\dot{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} = AT\boldsymbol{y} \qquad \therefore \dot{\boldsymbol{y}} = \overbrace{T^{-1}AT}^{\text{対角行列}}\,\boldsymbol{y}$$

## 対角正準形

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}, \;\; T = \overbrace{[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]}^{\text{固有ベクトル}}$$

# モード展開

### 状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ ⇩ 「モード」という

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{s_1 t}\,\boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{s_2 t}\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n e^{s_n t}\,\boldsymbol{v}_n \quad \text{モード展開}$$

$$\begin{array}{ccccc} \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ y_1(t) & y_2(t) & & y_n(t) & \text{モード座標} \end{array}$$

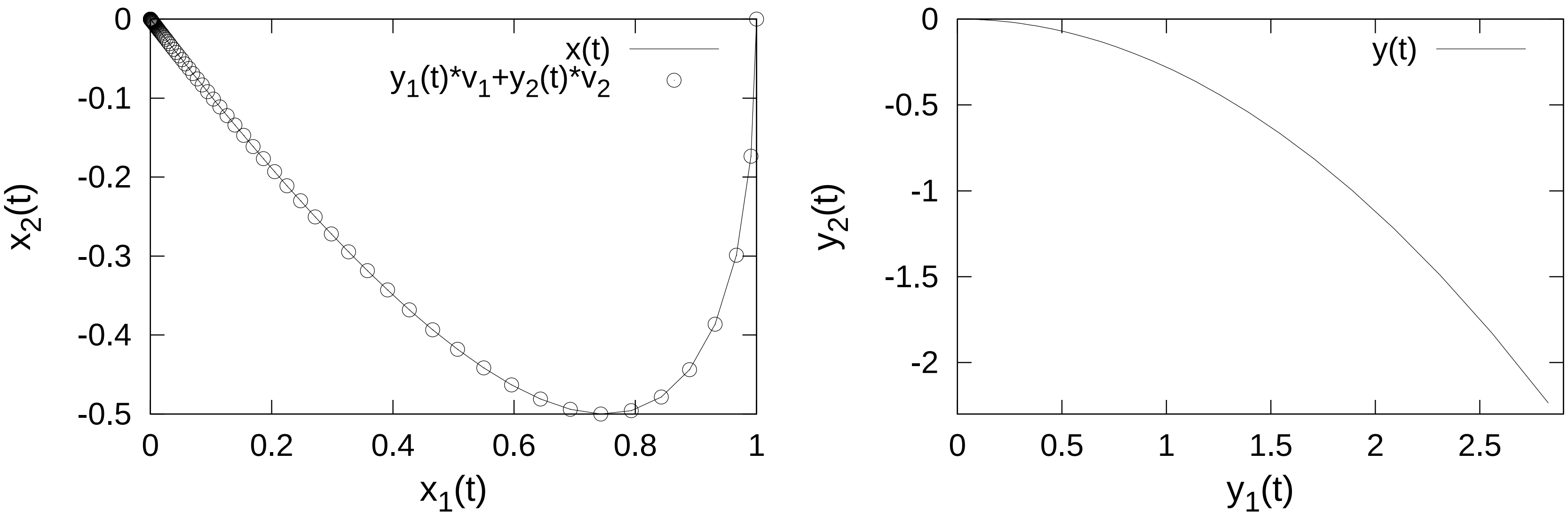
### 対角正準形

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

**実習 8**　1 つ前の例題の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ を用いて，状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ の軌道 $\boldsymbol{x}(t)$，モード座標の軌道 $\boldsymbol{y}(t)$，およびモード座標から復元した軌道 $\boldsymbol{x}(t) = y_1(t)\boldsymbol{v}_1 + y_2(t)\boldsymbol{v}_2$ を比較せよ.

# 解答例

**Code 7** を実行すると，次のような比較結果が得られる．元の状態量 $\boldsymbol{x}(t)$ と，モード座標 $\boldsymbol{y}(t)$ の軌道は異なるが (左右実線)，復元すると元に戻る (左○).



## 第 6 回 動的システム入門

# 状態フィードバック

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 学習目標

- 対角化して分かること ⇨ 可制御性
  - 線形制御系
  - 可制御性と判定則
- 可制御だとできること ⇨ 固有値設定
  - “一本化”
  - 状態フィードバック
  - 固有値設定

# 対角化して分かること

## — 可制御性 —

# 線形制御系

**定義**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t)$$

- $u(t)$ は人為的な入力 (スカラ)
- $\boldsymbol{b}$ はベクトル．$u(t)$ が作用する行と，強度を表す．

対角化 ⇩ $T\dot{\boldsymbol{y}} = AT\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}u(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \boldsymbol{\beta} \equiv T^{-1}\boldsymbol{b}$$

# 可制御性

## 線形制御系 (対角正準形)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \boldsymbol{\beta} \equiv T^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 例えば，$\beta_1 = 0$ とすると，

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = s_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = s_2 y_2 + \beta_2 u(t) \end{cases} \qquad \text{互いに独立！}$$

となり，制御入力 $u(t)$ が，第 1 モード $y_1(t)$ には伝わらない．

## 可制御性

- **可制御** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ **入力** $u(t)$ **が全ての行に伝わる** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \neq 0.$
- **不可制御** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ **入力** $u(t)$ **が伝わらない行** $\beta_i = 0$ **がある．**

# 可制御性の判定則

## 目標

$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t)$ の対角化 $\dot{\boldsymbol{y}} = A'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}\,u(t)$ において，

**可制御** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 「全て $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \neq 0$」 ⇦ $A, \boldsymbol{b}$ で判定したい！

- $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の関係： $\boldsymbol{b} = T\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \beta_1\underbrace{\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2}_{\text{固有ベクトル}}.$

- 両辺に $A$ を乗じる． $\boldsymbol{v}_i$ は固有ベクトルだから，

$$A\boldsymbol{b} = \beta_1 A\boldsymbol{v}_1 + \beta_2 A\boldsymbol{v}_2 = \beta_1 s_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2 s_2\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix}\beta_1 s_1\\ \beta_2 s_2\end{bmatrix}$$

■ $\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}$ を並べて，**可制御性行列** $U_c = [\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}]$ を作る.

$$U_c = [\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}] = \left[ [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \ [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$= [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \left[ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right] = T \left[ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$= T \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 s_1 \\ \beta_2 & \beta_2 s_2 \end{bmatrix} = T \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{bmatrix}}_{V}$$

■ 行列式 $|U_c| = |T\,B\,V| = |T| \cdot |B| \cdot |V|$ をとると，$|T|, |V| \neq 0$ より，

$$\beta_i \neq 0\ (\text{全ての } i) \overset{\text{必要}}{\underset{\text{十分}}{\Longleftrightarrow}} |B| = \beta_1 \beta_2 \neq 0 \overset{\text{必要}}{\underset{\text{十分}}{\Longleftrightarrow}} |U_c| \neq 0$$

**可制御性の判定則**

**可制御性行列** $U_c = [\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}]$ が，$|U_c| \neq 0 \overset{\text{等価}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{rank} U_c = n$

# 可制御だとできること

## — 固有値設定 —

# “一本化” と固有方程式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ k & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ kx_1 - cx_2\end{bmatrix}$$

逆操作 $\Downarrow$ $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$

$$\ddot{x} = (\dot{x})^{\cdot} = \dot{x}_2 = kx_1 - cx_2 = kx - c\dot{x}$$

$\Downarrow$

$$\ddot{x} + c\dot{x} - kx = 0 /\!/$$ “一本化” 完了

$\Downarrow$ 同じ係数

$$s^2 + c\,s - k = 0 /\!/$$ 固有方程式

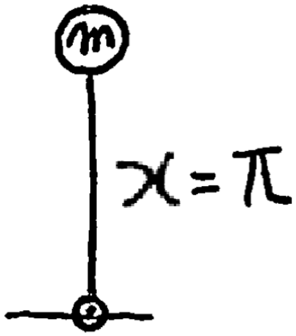
**証明**

$x(t) = e^{st}$ を代入すると，
$s^2e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0$
$(s^2 + cs + k)e^{st} = 0$ より，
$s^2 + cs + k = 0 \because e^{st} \neq 0$

**“一本化” の固有方程式**

同じ係数の代数方程式になる！

# 逆立ちした単振り子 (自然状態)



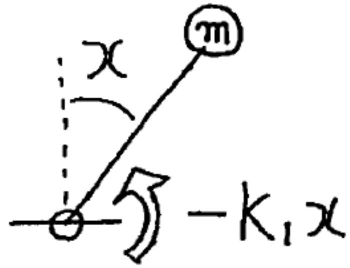

- 運動方程式： $\ddot{x} - kx = 0$ （減衰なし，外力なし）
- 固有方程式： $s^2 - k = 0$ （同じ係数の 2 次方程式）
- 固有値： $-\sqrt{k} < 0 < \sqrt{k}$ ⇨ 鞍点 ⇨ 発散

☆ 自然状態では，振り子は倒れる！

# 逆立ちした単振り子 ＋ P 制御

**P 制御 (比例制御)**

$$\ddot{x} - kx = u(t) = -K_1 x \qquad \text{(倒れ角 } x \text{ に比例した制御入力)}$$




- 移項して整理： $\ddot{x} - (k - K_1)x = 0$
- 固有方程式： $s^2 - (k - K_1) = 0$
- 固有値： $s = \pm\sqrt{k - K_1}$

$k - K_1 < 0$ ⇨ $s = \pm|k - K_1|i$ (純虚数) ⇨ 単振動

☆ P 制御した振り子は，倒れないが，止まらない！

振動も抑制したい ⇨ $D$ 制御 (微分制御)

# 逆立ちした単振り子 + PD 制御

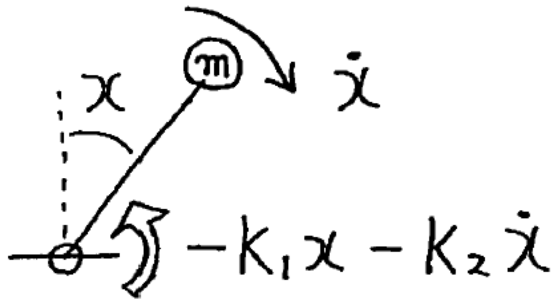
**D 制御 (微分制御)**

微分 $\dot{x}$ に比例する制御入力

**PD 制御 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ P 制御+D 制御**

$$\ddot{x} - kx = u(t) = -K_1 x - K_2 \dot{x}$$

- 移項して整理： $\ddot{x} + K_2\dot{x} - (k - K_1)x = 0$
- 固有方程式： $s^2 + K_2 s - (k - K_1) = 0$
- 固有値：$s = \dfrac{-K_2 \pm \sqrt{{K_2}^2 + 4(k - K_1)}}{2}$




適当な $K_1$, $K_2$ ⇨ 安定結節点 (減衰) or 安定渦点 (減衰振動)

☆ PD 制御した振り子は，上死点に向って減衰する！ 安定に立つ！

適当な $K_1$, $K_2$ とは？ ⇨ 固有値設定問題

# PD 制御 = 状態フィードバック

## PD 制御を受ける単振り子

$$\ddot{x} - kx = u(t) \ = -K_1 x - K_2 \dot{x} = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

1 階化 ⇩ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

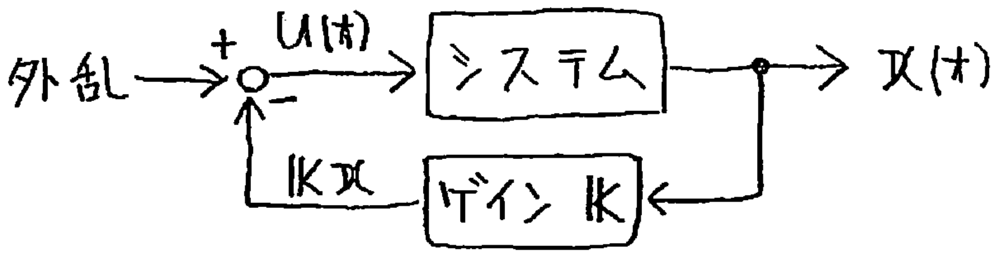
## 状態フィードバック

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\, u(t)$$

$$u(t) = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

### フィードバックとは?

出力 $\boldsymbol{x}(t)$ を入力 $u(t)$ に戻す操作のこと.



# 固有値設定 — 適切なゲイン $K_1, K_2$ の定め方

**PD 制御を受けるシステム**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ k & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(-K_1x_1 - K_2x_2)$$

⇩ "一本化"

$$\ddot{x} + K_2\dot{x} - (k - K_1)x = 0$$

⇩ 固有方程式

$$\left.\begin{aligned} s^2 + K_2 s - (k - K_1) = 0 \\ s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{係数比較} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = k + s_1 s_2 \\ K_2 = -(s_1 + s_2) \end{cases} //$$

⇧ 固有方程式

**設定したい固有値**

$s = s_1, s_2$ ※固有方程式 $(s - s_1)(s - s_2) = 0$

**例題**　固有値が $s_1, s_2 = -1 \pm 2i$ (減衰振動) となるような，ゲイン $K_1, K_2$ を求めよ．$k = 2$ とせよ．

$$\left.\begin{aligned} s^2 + K_2 s - (k - K_1) &= 0 \\ s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{係数比較} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = k + s_1 s_2 \\ K_2 = -(s_1 + s_2) \,/\!/ \end{cases}$$

# 解答例

$$K_1 = 2 + (-1+2i)(-1-2i) = 2+1+4 = 7$$

$$K_2 = -\{(-1+2i)+(-1-2i)\} = 2$$

Octave による検算：

```
octave:1> s1=-1-2*i, s2=-1+2*i
s1 = -1 - 2i
s2 = -1 + 2i
octave:2> k=2
k =  2
octave:3> K1=k+s1*s2
K1 =  7
octave:3> K2=-(s1+s2)
K2 =  2
octave:5> roots([1,K2,-(k-K1)])
ans =
  -1 + 2i
  -1 - 2i
```

# 第 7 回 動的システム入門

## 可制御正準形

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 学習目標

- $n$ 次元制御系を “一本化” する.
  - 可制御ならできる！ ⇨ 可制御正準形
  - 可制御正準形の求め方
  - $n$ 次元の “一本化”
- $n$ 次元制御系で固有値設定を行う.
  - 状態フィードバック
  - 固有方程式の比較
  - 固有値設定

# $n$ 次元制御系の固有値設定

## 目標

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t)$$

⇩ “一本化”

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dx}{dt} + a_1 x = u(t)$$

⇩ 状態フィードバック

$$u(t) = -\left( K_1 x + K_2 \frac{dx}{dt} + \cdots + K_n \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right)$$

⇩ 固有方程式

$$s^n + (a_n + K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + K_2)s + (a_1 + K_1) = 0$$

**ゲイン $\boldsymbol{K} = (K_1, \cdots, K_n)$ で固有値設定する！**

# $n$ 次元制御系の “一本化”

**可制御正準形 …… すぐに “一本化” できる形式**

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A_c \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_c\, u(t) :$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$y_1 = y$ とおくと，順次，$y_2 = \dot{y}$，$y_3 = \ddot{y}$，$\cdots$，$y_n = y^{(n-1)}$

最終行 ⇩ に代入

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \dot{y} + a_1 y = u(t) \,/\!/$$

☆ 可制御正準形は，すぐに “一本化” できる．∴ 固有値設定できる！

# 可制御正準形への変形可能性

**定理**

制御系 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t)$ が**可制御**ならば，適当な斜交成分 $\boldsymbol{y} = T_c^{-1}\boldsymbol{x}$ が存在して，可制御正準形 $\dot{\boldsymbol{y}} = A_c\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_c\,u(t)$：

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

が得られる．ただし，$A_c = T_c^{-1}AT_c$，$\boldsymbol{b}_c = T_c^{-1}\boldsymbol{b}$.

⇨ 基底変換行列 $T_c$ の求め方？

# 基底変換行列 $T_c$ の求め方

- 基底変換行列 $T_c = U_c W$
- 可制御性行列 $U_c = [\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{b}]$
- $W = [w_{ij}] = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & \iddots & a_n & 1 & \\ \vdots & a_n & 1 & & \\ a_n & 1 & & \text{\huge 0} & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$

⇧ **表 6.1**

固有方程式 $|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$

**実習 9　Code 9** を実行せよ．乱数で無作為に作った $A$, $\boldsymbol{b}$ について，対応する可制御正準形の $A_c$, $\boldsymbol{b}_c$ が求まる．

## 実行例

$A$, $\boldsymbol{b}$ を乱数で発生させるので，実行結果は，毎回変化する！

```
A =
   0.858128  -1.517189  -0.741770
  -0.188327   0.907228   1.588477
  -0.053336   0.308342   0.099851
bb =
  -0.86866
   0.62442
   1.29061
aa =
   0.23538   0.13970  -1.86521
W =
   0.13970  -1.86521   1.00000
  -1.86521   1.00000   0.00000
   1.00000   0.00000   0.00000
```

```
Tc =
  -1.94333  -1.02990  -0.86866
  -1.49290   1.61552   0.62442
   0.52972  -2.03953   1.29061
Ac =
  -0.00000   1.00000  -0.00000
  -0.00000   0.00000   1.00000
  -0.23538  -0.13970   1.86521
bbc =
  -0
   0
   1
```

※ -0 や -0.00$\cdots$ は 0 のこと！

# 固有値設定問題

## 斜交成分 $y$ の固有値設定

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t) \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{y}} = A_c\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_c\,u(t)$$ 可制御正準形！

"一本化" $\Downarrow$ 状態フィードバック

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y = u(t) = -\left(K_1 y + \cdots + K_n y^{(n-1)}\right)$$

固有方程式 $\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} s^n + (a_n + K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_1) = 0 \\ s^n + c_n s^{n-1} + \cdots + c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{係数比較} \quad K_i = c_i - a_i}$$

固有方程式 $\Uparrow$ $(s - s_1)\cdots(s - s_n) = 0$

目標とする固有値 $s_1, \cdots, s_n$

## 直交成分への翻訳

$$u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = -\underbrace{\boldsymbol{K}\,T_c^{-1}}_{\boldsymbol{K}_p}\boldsymbol{x}$$

## 固有値設定 (まとめ)

線形制御系 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t)$ の固有値は，状態フィードバック，

$$u(t) = -\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{K}_p \equiv (c_1 - a_1, \cdots, c_n - a_n)T_c^{-1}$$

で設定できる．ただし，

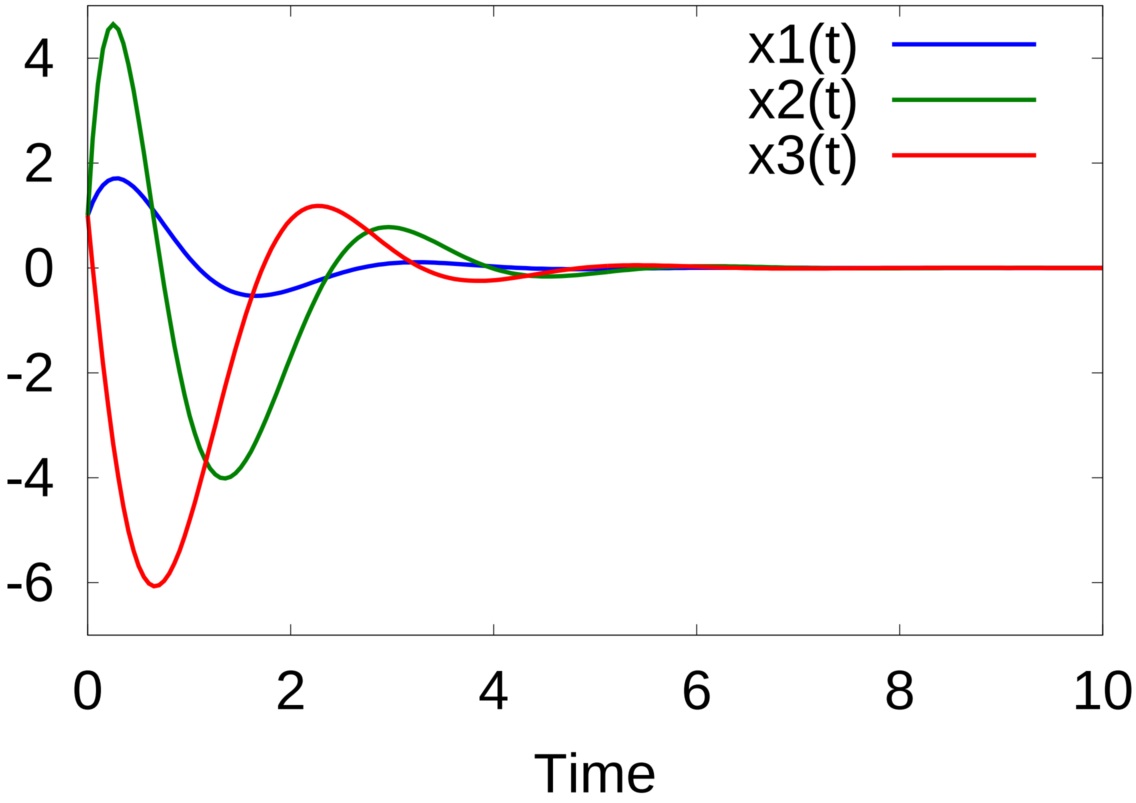
$a_i$ ⋯⋯ $A$ の固有方程式 $|A - sI| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_1 = 0$ の係数．

$c_i$ ⋯⋯ 目標の $s_1, \cdots, s_n$ を解に持つ固有方程式 $s^n + c_n s^{n-1} + \cdots + c_1 = 0$ の係数．

**実習 10**　**Code 10** を実行せよ．乱数で無作為に作った $A$, $\boldsymbol{b}$ について，目標の固有値 $-1-2i$, $-1+2i$, $-3$ を実現するゲイン $\boldsymbol{K}_p$ が求まり，そのときの時間応答が表示される．

# 解答例

乱数で状態方程式を生成するため，時間応答は，毎回変化する．



第 8 回 動的システム入門

# 演習 1 — Octave 入門

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

# 演習の進め方

- テキストの **11** 章「演習 **1**」を自習せよ.
- グループワークを成績評価の前提条件とする.
  - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと.
  - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ.
  - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ.
  - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ.

**グループワークの重要性**

権威 (授業なら教員) に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される．自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる.

## 第 9 回 動的システム入門

# 演習 2 — 動的システムと固有値設定

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 演習の進め方

- テキストの 12 章「演習 2」を自習せよ.
- グループワークを成績評価の前提条件とする.
  - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと.
  - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ.
  - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ.
  - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ.

**グループワークの重要性**

権威 (授業なら教員) に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される．自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる.

## 第 10 回 動的システム入門

# 関数の最小化 (微分法)

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

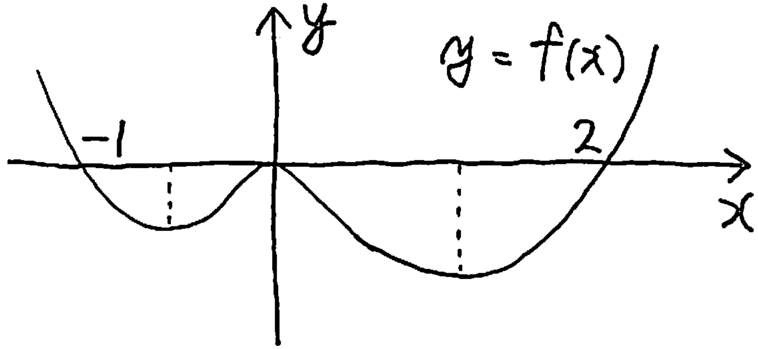
http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

# 学習目標

- 関数の最小化 (微分法)
- 拘束条件付きの最小化 (ラグランジュの未定乗数法)
- 最適制御問題

# 最小化と微分法

- 例えば，4 次曲線 $y = f(x) = x^2(x+1)(x-2)$.




- 最小点 $x = a$ を探すには，微分 0 の点を求めればよい．

$$f'(x) = 2x(x+1)(x-2) + x^2(x-2) + x^2(x+1)$$
$$= 4x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

- 最小点の候補 $a \approx -0.693$，$0$，$1.443$.

☆ 微分するだけでは，どれが最小点か，分らない！

# 最小化の必要条件

■ 最小値と微分の関係：

$$\underbrace{f(x) \text{ が } x = a \text{ で最小値をとる}}_{P} \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{微分 } f'(a) = 0}_{Q}$$

■ 因果関係 $P \implies Q$

$$\begin{cases} P \text{ は，} Q \text{ であるための十分条件.} \\ Q \text{ は，} P \text{ であるための必要条件.} \end{cases}$$

⇩

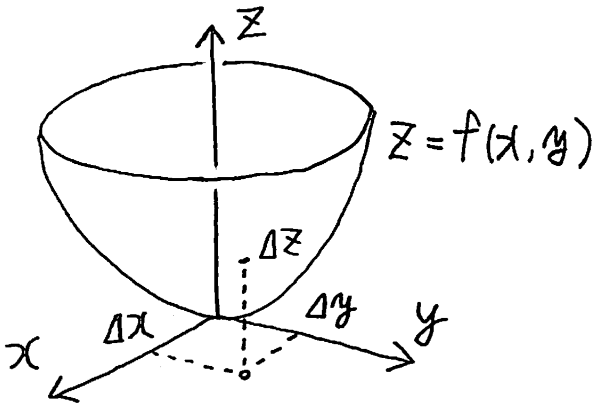
**算法 7.1**

関数 $f(x)$ が $x = a$ で最小となる**必要条件**は，$f'(a) = 0$ である．

☆ 最小化の必要条件は，最小点の「候補」を与える．

# 2 変数関数 $f(x,y)$ の最小化

- 例えば，2 次曲面 $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x,y) = x^2 + y^2$




- 点 $\boldsymbol{a} = (a,b)$ で最小となる必要条件 $\cdots$ 増分 $\Delta z$ が 0 になること．

$$\begin{aligned}\Delta z &\equiv f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)\\ &= (a+\Delta x)^2 + (b+\Delta y)^2 - a^2 - b^2\\ &= (2a)\Delta x + (2b)\Delta y + \underbrace{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}_{0} = 0\end{aligned}$$

$\therefore$ 最小点は $a = b = 0$

# $n$ 変数関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の最小化

**表記**

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x}) \quad ※\ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$\begin{aligned}\Delta z &\equiv f(a_1 + \Delta x_1, \cdots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \cdots, a_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\,\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\,\Delta x_n \quad = 0\end{aligned}$$

⇩

**$n$ 変数関数の最小化**

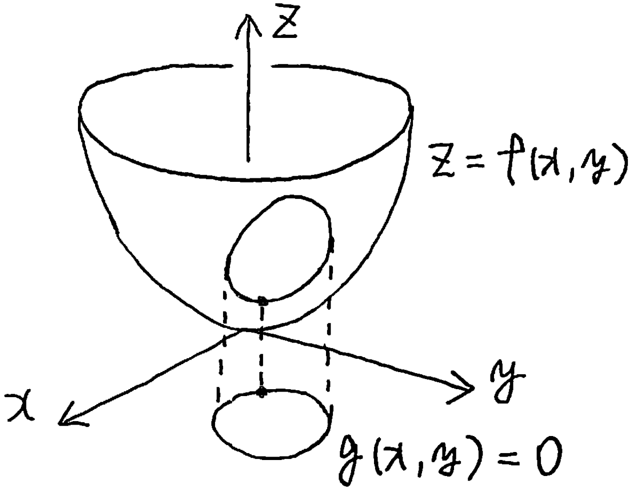
関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ で最小となる**必要条件**は,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = 0$$

# 拘束条件付きの最小化

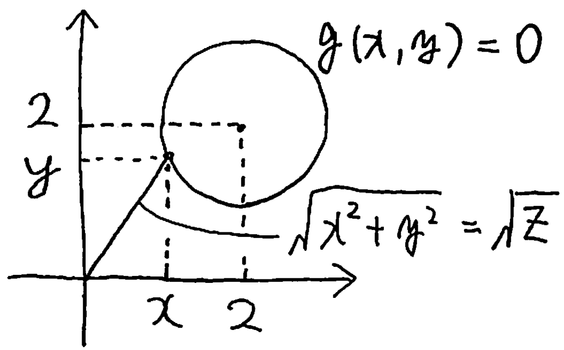
## 表記

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} : g(\boldsymbol{x}) = 0 \quad ※\ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$




■ 拘束条件 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ を満足する $\boldsymbol{x}$ のなかで，$f(\boldsymbol{x})$ を最小化する！

# 代入法は面倒くさい！




- 例題：

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}} : f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \mathrm{sub.to} : g(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$ ※中心 $(2,2)$ の単位円

- $g(x,y)$ を $y$ について解く ⇨ $y = 2 \pm \sqrt{1-(x-2)^2}$
- 代入すると，1 変数関数 $f(x)$ に帰着．

$$f(x,y) = x^2 + \left\{2 \pm \sqrt{1-(x-2)^2}\right\}^2 \quad \equiv f(x)$$

- $\pm\sqrt{\cdots}$ を含む必要条件 $f'(a) = 0$ は，解きにくい！

⇨ ラグランジュの未定乗数法

# ラグランジュの未定乗数法

## 未定乗数法

拘束条件付き最小化

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x})$$

sub.to : $g(\boldsymbol{x}) = 0$

変形できる！

ラグランジュ乗数 $\lambda$

拘束条件なし最小化

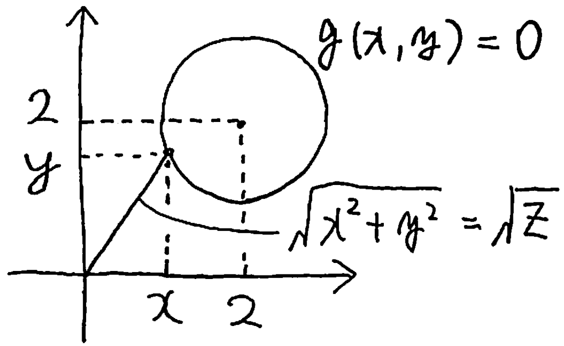
$$\min_{(\boldsymbol{x},\lambda)} : h(\boldsymbol{x}, \lambda)$$

$$h(\boldsymbol{x}, \lambda) \equiv f(\boldsymbol{x}) + \lambda\, g(\boldsymbol{x})$$

## 新しい必要条件

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \cdots = \frac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) \quad = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$$

# 未定乗数法の例題




■ 例題：

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}} : f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{sub.to} : g(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

※中心 $(2,2)$ の単位円

未定乗数法 ⇨ $\min : h(x,y,\lambda) \equiv x^2+y^2+\lambda\left\{(x-2)^2+(y-2)^2-1\right\}$

■ 必要条件：

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-2) \quad \therefore x = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial y} = 2x + 2\lambda(x-2) \quad \therefore y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 \quad \therefore \lambda = -1 \pm 2\sqrt{2} \,/\!/$$

■ 最小点の候補：

$$(x,y) = \underline{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}},\ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \quad \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

最小

**練習問題**

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{x}} : f(x,y) = 2x + 2y & \text{※長方形の周長} \\ \text{sub.to} : g(x,y) = xy - 1 = 0 & \text{※面積 } 1 \end{cases}$$

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

# 解答例

- 未定乗数法 ⇨ $\min : h(x, y, \lambda) \equiv 2x + 2y + \lambda \left\{ xy - 1 \right\}$

- 必要条件： $$0 = \frac{\partial h}{\partial x} = 2 + \lambda y \quad \therefore y = -\frac{2}{\lambda}$$ $$0 = \frac{\partial h}{\partial y} = 2 + \lambda x \quad \therefore x = -\frac{2}{\lambda}$$ $$0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = xy - 1 = \frac{4}{\lambda} - 1 \quad \therefore \lambda = \pm 2 \,/\!/$$

- 最小点の候補：$(x, y) = \underbrace{(-1, -1)}_{最小},\ \underbrace{(1, 1)}_{最小} \,/\!/$

- 周長を最小にする面積 1 の長方形は「正方形」！

# 多次元の未定乗数法

- $n$ 変数関数 $\cdots$ $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$.
- $m$ 本の拘束条件式 $\cdots$ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$

ラグランジュ乗数 ($m$ 個) $\Downarrow$ $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$

- $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})$

**未定乗数法 (拘束条件 $m$ 本)**

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x})$$

sub.to : $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0$

等価 $\Rightarrow$

$$\min_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})} : h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

必要条件 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial \lambda_j}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \end{cases}$$

# (補足：転置部分の詳細)

$$
\begin{aligned}
h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &\equiv f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \\
&= f(\boldsymbol{x}) + (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \\
&= f(x) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

# 最適制御問題

- 与えられた評価関数 (省エネ，乗り心地，$\cdots$) を，最小化 or 最大化する制御入力 $u(t)$ を求める問題のこと．

**最適制御の例**

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} : J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} q\,x(s)^2 + r\,u(s)^2 ds & \text{(評価関数)} \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) & \text{(状態方程式)} \end{cases}$$

評価関数の係数 $q, r$ を「重み」という．

- 特徴 1： 最小化する関数 $J$ の値が，関数形 $x(t), u(t)$ で決まる．
- 特徴 2： 拘束条件が「微分方程式」である．

$\therefore$ 微分法では解けない！ ⇨ 「変分法」だと解ける (次回)

# 境界条件

**両端固定 ⋯ 積分区間 $\int_{t_0}^{t_1}$ の両端で，状態量を指定**

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

**具体例**　停止状態にある自動車を，5 秒後に 100m 地点を時速 100km/s で通過させ (両端固定)，このときの消費エネルギーを最小化せよ (最適制御).

**終端自由 ⋯ 初期値のみ指定**

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \text{任意}$$

**具体例**　クレーン (単振り子) の振動エネルギーを最小化せよ (最適制御).　※制御は「掛けっぱなし」とする (終端自由)

第 11 回 動的システム入門

# 最適制御入門 (変分法)

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

# 学習目標

- 最適制御問題の定式化 (復習)
- 汎関数の最小化問題 ⇨ 変分法
- 最適制御問題の解法 (**1** 次元)
- 例題 (**1** 次元)
- $n$ 次元の解法

# (最適制御問題)

- 与えられた評価関数 (省エネ，乗り心地，$\cdots$) を，最小化 or 最大化する制御入力 $u(t)$ を求める問題.

**最適制御の例**

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{u(t)} : J = \int_{t_0}^{t_1} q\,x(\tau)^2 + r\,u(\tau)^2 d\tau & \text{(評価関数)} \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) & \text{(状態方程式)} \end{cases}$$

評価関数の係数 $q, r$ を「重み」という.

- 特徴 1： 最小化する関数 $J$ の値が，関数形 $x(t), u(t)$ で決まる.
- 特徴 2： 拘束条件が「微分方程式」である.

$\therefore$ 微分法では解けない！ ⇨ 「変分法」だと解ける (今回)

# 変分法

# 汎関数

## 汎関数

「関数の関数」のこと．関数形 $x(t)$ を代入すると値が定まる．

$$J[x(t)] = \text{値}$$

## 積分型の汎関数 (典型例)

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(x(\tau), \dot{x}(\tau)\big) d\tau$$

⇩

## 最小化の必要条件

$$\textbf{汎関数の増分}: \delta J[x(t)] \equiv J[x(t) + \delta x(t)] - J[x(t)] \quad = 0$$

- 関数 $x(t)$ の微小な「ずれ」$\delta x(t)$ を**変分**という．

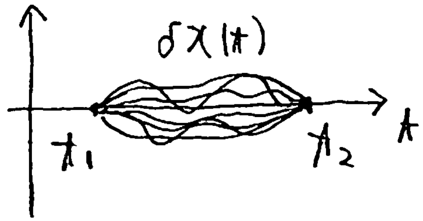
  ※通常の変数 $x$ の微小な「ずれ」は**微分**と呼んだ．

# 変分の境界条件

求める関数 $x(t)$ の $\begin{cases} x(t_0) = x_0,\ \delta x(t_1) = x_1 & \text{(両端固定)} \\ x(t_0) = x_0,\ \delta x(t_1) = \text{任意} & \text{(終端自由)} \end{cases}$ に合せて……

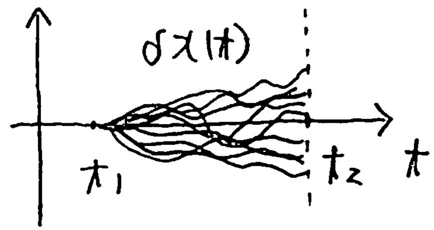
## 両端固定

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta x(t_1) = 0$$




## 終端自由

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta x(t_1) = \text{任意}$$




- 変分 $\delta x(t)$ は，微小振幅の様々な関数！

  ※通常の微少量 $\Delta x$ は，様々な微小数 $0.01, -0.002, \cdots$.

# 汎関数の増分 $\delta J[x(t)]$

**定理**

$$\delta J[x(t)] \equiv J[x(t)+\delta x(t)] - J[x(t)]$$
$$= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1}\delta x(t_1) - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0}\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta x d\tau$$

- 証明の方針：

関数の全微分と同様の展開,

$$L\big(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}\big) - L\big(x, \dot{x}\big) = \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x})\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})\delta\dot{x}$$

と部分積分を使う.

# 最小化の必要条件 (両端固定)

**オイラーの方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

- 証明：

両端固定の変分 $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_1) = 0$ を，汎関数の増分 $\delta J[x(t)]$ に代入すると，積分の項だけが残り，

$$\delta J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \underline{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)} \right\} \delta x d\tau \quad = 0$$

変分 $\delta x(t)$ の関数形は任意だから，下線が 0 となる．

# 最小化の必要条件 (終端自由)

**オイラーの方程式 ＋ 追加の終端条件**

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 0$$

- 証明：

終端自由より，一般に $\delta x(t_1) \neq 0$ なので，2 つ項が残る．

$$\delta J[x(t)] = \underline{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1}}\delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\} \delta x d\tau \quad = 0$$

$\delta x(t_1) \neq 0$ より，下線も 0 となる．

# 汎関数の最小化 ($n$ 次元)

$\boldsymbol{x}(t) = [x_i(t)]$ の各成分 $x_i(t)$ に対して，同様な算法が成立する．

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

終端自由「$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) =$ 任意」に対して，

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t_1} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

ベクトルで ⇩ 短縮表記

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}\right], \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]$$

⇨ $n$ 次元の公式

# 最小化の必要条件 ($n$ 次元)

## オイラーの方程式 ($n$ 次元)

積分型の汎関数,

$$J[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\big)d\tau, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$$

を最小化するベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は，**オイラーの方程式**,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) \equiv \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right] = \mathbf{0}$$

の解となる．終端自由 ($\boldsymbol{x}_1 =$ 任意) では，追加の終端条件が課される．

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right|_{t=t_1} \equiv \left[\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t_1}\right] = \mathbf{0}$$

# 最適制御の解法

# 解法 (1 次元)

**最適制御問題 (1 次元)**

$$\begin{cases} \min\limits_{x,u} : J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L\big(x(\tau), u(\tau)\big) d\tau \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big) \end{cases} \quad \text{with } x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

ラグランジュの ⇩ 未定乗数法 $(\lambda)$

$$\begin{cases} \min\limits_{x,u,\lambda} : J' = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L'\big(x(\tau), u(\tau), \lambda(\tau)\big) d\tau \\ L'(x, u, \lambda) \equiv L(x, u) + \lambda(f(x, u) - \dot{x}) \end{cases} \quad \text{with } x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

⇨ 必要条件は，オイラーの方程式

# 必要条件 (1 次元)

**最適制御の必要条件 (1 次元)**

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(L + \lambda f) & \text{(随伴方程式)} \\
0 = \dfrac{\partial}{\partial u}(L + \lambda f) & \text{(入力の条件)} \\
\dot{x} = f(x, u) & \text{(状態方程式)}
\end{cases}
$$

with

**両端固定**

$$
x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1
$$

**終端自由**

$$
x(t_0) = x_0,\ \lambda(t_1) = 0
$$

- 証明： オイラーの方程式より，

$$
0 = \frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}(-\lambda) \quad \therefore\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}(L + \lambda f)
$$

$$
0 = \frac{\partial L'}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}(0) \quad \therefore\ 0 = \frac{\partial}{\partial u}(L + \lambda f)
$$

$$
0 = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \dot{x} - f(x, u) - \frac{d}{dt}(0) \quad \therefore\ \dot{x} = f(x, u)
$$

# 証明の続き

- また，終端自由の場合は，$x(t_1) = x_1$ の代りに，$\lambda(t)$ の終端条件，

$$0 = \left.\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = -\lambda(t_1) \quad \therefore \lambda(t_1) = 0$$

  が課される．

# 例題 (1 次元)

# 例題と解法

## 冒頭の例題

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)} : J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} q\,x(\tau)^2 + r\,u(\tau)^2 d\tau & \text{(評価関数)} \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) & \text{(状態方程式)} \end{cases}$$

$L = q\,x^2 + r\,u^2,\ f = a\,x + b\,u$ ⇩ **最適制御の必要条件 (1 次元)** に代入

$$\dot{\lambda} = -2q\,x - a\,\lambda, \quad \underline{0 = 2r\,u + b\,\lambda}, \quad \dot{x} = a\,x + b\,u$$

**最適入力** ⇩ $u(t) = -\frac{b}{2r}\lambda(t)$

## 整理された必要条件

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) - \frac{b^2}{2r}\lambda(t) & \text{(状態方程式)} \\ \dot{\lambda}(t) = -2q\,x(t) - a\,\lambda(t) & \text{(随伴方程式)} \end{cases} \text{ with } \begin{cases} x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \\ \text{or} \\ x(t_0) = x_0,\ \lambda(t_1) = 0 \end{cases}$$

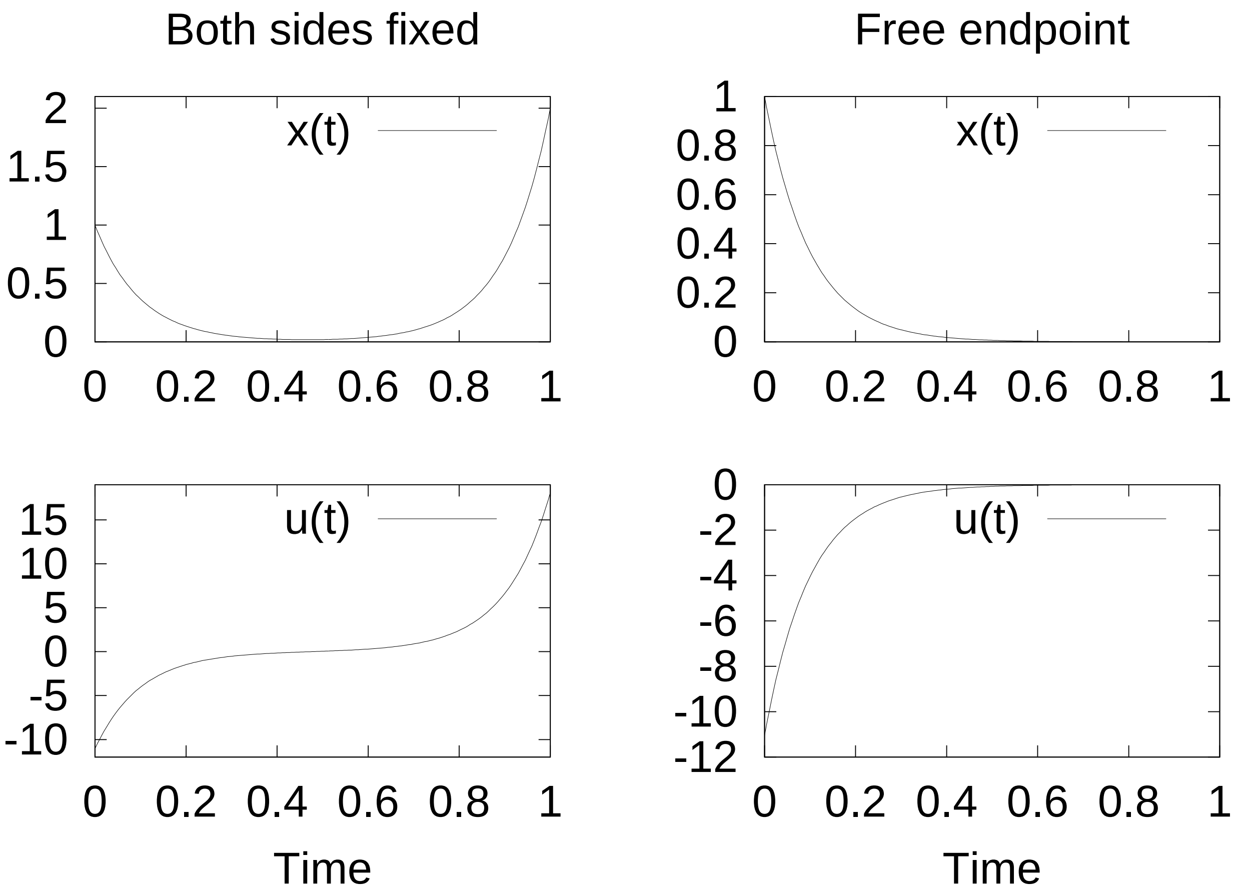
**実習 11**　「**整理された必要条件**」の数値解を求め，状態 $x(t)$ と最適入力 $u(t)$ の時間応答を観察せよ．境界条件は，

$$\begin{cases} \text{両端固定}\ x(0) = 1,\ x(1) = 2 \\ \text{終端自由}\ x(0) = 1,\ \lambda(1) = 0 \end{cases}$$

の 2 種類とし，その他のパラメータは，$a = 1$, $b = 1$, $q = 100$, $r = 1$ とせよ．次に，重み $q, r$ を変化させて，重みの効果を考察せよ．

# 解答例

テキストの解答例の要領で，整理された必要条件と等価な初期値問題を導く．これを **Code 11** で解くと，次の結果が得られる．



# $n$ 次元の解法

## 最適制御の解法 ($n$ 次元)

$n$ 次元の最適制御問題,

$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} L\big(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)\big) d\tau \\ \text{sub.to} : \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) \end{cases} \quad \text{with } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$$

を達成する制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ は，次の方程式の解となる．($^T$ は転置)

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \qquad \text{(ハミルトニアン)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = -\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T - \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(随伴方程式)}$$

$$\boldsymbol{0} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(入力の条件)}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \qquad \text{(状態方程式)}$$

終端自由の場合は，終端条件 $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$ の代りに，$\boldsymbol{\lambda}(t_i) = \boldsymbol{0}$ を課す.

第 12 回 動的システム入門

# 最適レギュレータ

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

# 学習目標

- 最適レギュレータとは？
- 最適レギュレータの必要条件
- 状態フィードバック表示
- リカッチ方程式 (有限時間)
- リカッチ方程式 (無限時間)

# 最適レギュレータとは？

## — 別名：LQR —

- 状態方程式が，**線形** (Linear)
- 評価関数が，**2 次** (Quadratic)
- 境界条件が，**終端自由**

$\Bigg\}$ である**最適制御**のこと！

- **レギュレータ** (Regulator) ⋯ 掛けっぱなしの定値制御 **∴終端自由**

### 最適レギュレータ (LQR) 問題

$$\begin{cases} \min : J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right\} d\tau \\ \text{sub.to} : \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}(t_1) = \text{終端自由} \end{array}$$

ただし，行列 $Q, R$ は対称かつ正定値.

☆ **正定値** についてはテキストの **9.1** 節を参照のこと.

# 必要条件

## 最適制御の解法 ($n$ 次元)

$n$ 次元の最適制御問題,

$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} L\big(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)\big)d\tau \\ \text{sub.to} : \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big) \end{cases} \quad \text{with } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$$

を達成する制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ は，次の方程式の解となる．($^T$ は転置)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T - \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(随伴方程式)}$$

$$\mathbf{0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{(入力の条件)}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \qquad \text{(状態方程式)}$$

終端自由の場合は，終端条件 $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$ の代りに，$\boldsymbol{\lambda}(t_i) = \mathbf{0}$ を課す.

最適レギュレータ $L = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{f} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ を代入 ⇨

# 必要条件の導出

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = -2Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} & \because Q^T = Q \\ \underline{\boldsymbol{0}} = \left(\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} \underline{= 2R\boldsymbol{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}} & \because R^T = R \\ \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{x} + B\,\underline{\boldsymbol{u}} & \end{cases}$$

⇦ 最適入力 $\underline{\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}}$

**整理された必要条件**

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\left(\underline{-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}}\right) & \text{(状態方程式)} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -2Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} & \text{(随伴方程式)} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{0} \end{array}$$

ベクトルでまとめて整理 ⇨

# LQR の状態フィードバック表示 (1/2)

**整理された必要条件 (ベクトル形式)**

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BR^{-1}B^T \\ -2Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = M\boldsymbol{q}$$

行列指数関数 $e^{Mt}$ ⇩ と終端時刻 $t_1$

$$\text{解}\ \boldsymbol{q}(t) = \underbrace{e^{M(t-t_1)}}_{\Phi(t)} \boldsymbol{q}(t_1)$$

- 推移行列 $\Phi(t)$ の 4 分割： $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}$
- 終端条件 $\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{0}$ の代入： $\boldsymbol{q}(t_1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t_1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t_1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

⇨ $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}(t) = \Phi(t)\ \boldsymbol{q}(t_1) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t)\boldsymbol{x}(t_1) \\ \Phi_{21}(t)\boldsymbol{x}(t_1) \end{bmatrix}$ ⇨ $\boldsymbol{x}(t_1)$ 消去！

# LQR の状態フィードバック表示 (2/2)

- $\boldsymbol{x}(t_1)$ の消去：$\boldsymbol{\lambda}(t) = \Phi_{21}(t)\boldsymbol{x}(t_1) = \underbrace{\Phi_{21}(t)\Phi_{11}(t)^{-1}}_{\equiv 2P(t)}\boldsymbol{x}(t)$

  $\therefore \boldsymbol{\lambda}(t) = 2P(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ //

  ⇩ 制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ に代入

- 最適入力：$\boldsymbol{u}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t) = -R^{-1}B^T\,P(t)\,\boldsymbol{x}(t)$

  $\therefore \boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\,P(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ // 状態フィードバックで表せた！

**謎の行列**

$$P(t) \equiv \frac{1}{2}\Phi_{21}(t)\Phi_{11}(t)^{-1}$$

$\Phi_{ij}(t)$ が邪魔！ ⇨ 微分すると消去できる

# リカッチ方程式 (1/2)

## 行列の時間微分

時間に依存する行列 $A(t), B(t)$ に対して,

1. $\{A(t)\,B(t)\}^{\cdot} = \dot{A}(t)\,B(t) + A(t)\,\dot{B}(t)$
2. $\{A(t)^{-1}\}^{\cdot} = -A(t)^{-1}\,\dot{A}(t)\,A(t)^{-1}$

- $\dot{P} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}_{21}\Phi_{11}^{-1} + \frac{1}{2}\Phi_{21}(\Phi_{11}^{-1})^{\cdot} = \frac{1}{2}\,\underline{\dot{\Phi}_{21}\Phi_{11}^{-1}} - \underbrace{\frac{1}{2}\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}}_{P}\,\underline{\dot{\Phi}_{11}\Phi_{11}^{-1}}$

推移行列の性質 ⇩ $\begin{cases} \dot{\Phi}_{11} = M_{11}\Phi_{11} + M_{12}\Phi_{21} \\ \dot{\Phi}_{21} = M_{21}\Phi_{11} + M_{22}\Phi_{21} \end{cases}$

- $$\begin{aligned} \underline{\dot{\Phi}_{21}\Phi_{11}^{-1}} &= (M_{21}\Phi_{11} + M_{22}\Phi_{21})\Phi_{11}^{-1} = M_{21} + M_{22}(2P) \\ \underline{\dot{\Phi}_{11}\Phi_{11}^{-1}} &= (M_{11}\Phi_{11} + M_{12}\Phi_{21})\Phi_{11}^{-1} = M_{11} + M_{12}(2P) \end{aligned}$$

⇨ $\dot{P}$ に代入

# リカッチ方程式 (2/2)

- $$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{1}{2}M_{21} + M_{22}P - P(M_{11} + 2M_{12}P) \\ &= \frac{1}{2}M_{21} + M_{22}P - PM_{11} - P(2M_{12})P\end{aligned}$$

$\Downarrow$ 代入 $\begin{cases} M_{11} = A, & M_{12} = -\frac{1}{2}BR^{-1}B^T \\ M_{21} = -2Q, & M_{22} = -A^T \end{cases}$

- $\dot{P} = -Q - A^TP - PA + PBR^{-1}B^TP$ // リカッチ方程式という！
- 境界条件： $P(t_1) = O$ ※テキスト参照

# 最適レギュレータの解法

## 有限時間 LQR

最適レギュレータ (LQR) 問題の最適入力は,

$$\boldsymbol{u}(t) = -K(t)\,\boldsymbol{x}(t), \quad K(t) \equiv R^{-1}B^T P(t)$$

で与えられる．行列 $P(t)$ は，次の**リカッチ方程式**の解である．

$$\dot{P} = -Q - A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P, \quad P(t_1) = O \text{ ※零行列}$$

- 時間変化するゲイン $K(t) = R^{-1}B^T P(t)$ を**可変ゲイン**という．
- リカッチ方程式の解 $P(t)$ は，状態量 $\boldsymbol{x}(t)$ とは無関係に求まる．

⇩

## 応用上の利点

システムの構造 $A, B, Q, R$ から，制御器を**事前に設計**できる．

**実習 12**　**実習 11** で観察した終端自由の最適制御問題,

$$\begin{cases} \min : J = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} q\, x(\tau)^2 + r\, u(\tau)^2 d\tau, \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a\, x(t) + b\, u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \text{任意} \end{cases}$$

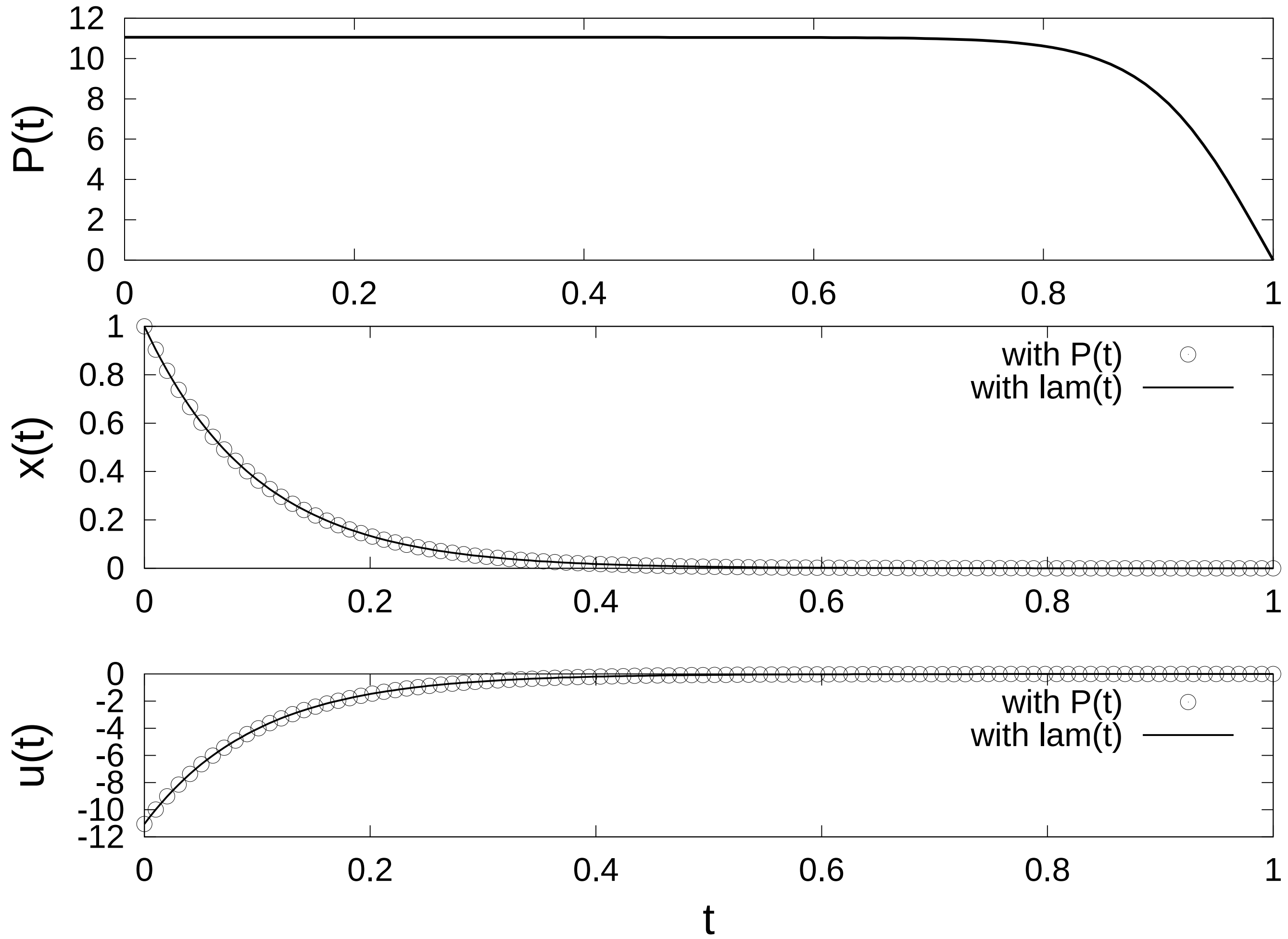
は最適レギュレータ問題となる．対応するリカッチ方程式,

$$\dot{P} = -P - aP - Pa - Pb\frac{1}{r}bP, \quad P(t_1) = 0$$

の数値解 $P(t)$ を求め，制御入力 $u(t) = -\frac{1}{r}bP(t)x(t)$ と状態量 $x(t)$ の時間応答を観察せよ．次に，終端時刻 $t_1$ を増加させ，$P(t)$ のグラフがどう変化するか観察せよ．

## 解答例

**Code 11** を実行した後に，**Code 12** を実行する． ⇨ 次のスライド

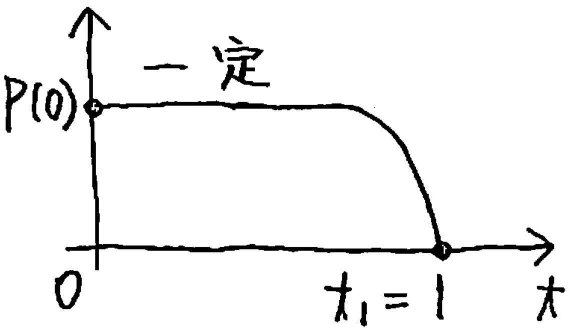



■ 中段・下段 … 実線は**実習 11** の時間応答．○が今回求めた時間応答．

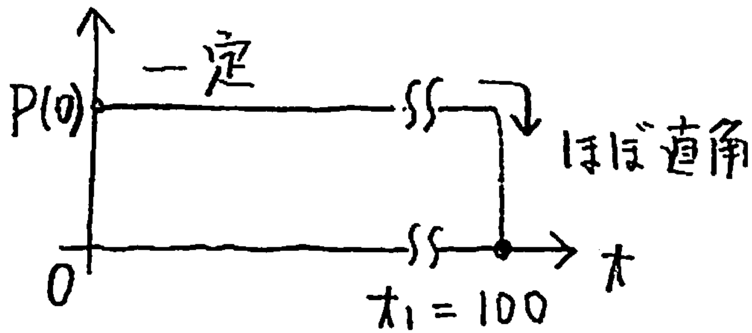
※ 同じ問題の解なので，両者は重なる．

# 無限時間 最適レギュレータ

- **実習 11** のリカッチ方程式の解 $P(t)$ の性質：




終端時刻 $t_1$
$\Longrightarrow$
を増すと




- 実は，一般に $t_1 = \infty \quad \Longrightarrow \quad P(t) = P(0)$ ※定数行列
- ゆえに，$t_1 = \infty \quad \Longrightarrow \quad \dot{P}(t) = O$ ※零行列
- $\dot{P} = \underline{-Q - A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P = O}$ //

リカッチ代数方程式という！

# 最適レギュレータの解法 (無限時間)

## 無限時間 LQR

終端時刻が $t_1 = \infty$ のとき，最適レギュレータ (LQR) の最適入力は,

$$\boldsymbol{u}(t) = -K\,\boldsymbol{x}(t), \quad K \equiv R^{-1}B^T P(0)$$

ただし，行列 $P(0)$ は，次の**リカッチ代数方程式**の解である.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = O \quad (\text{零行列})$$

- ゲインが，固定ゲイン $K = R^{-1}B^T P(0)$ となる.

⇨ 制御器に，時間波形 $K(t)$ を記憶させておく必要がない.

⇩

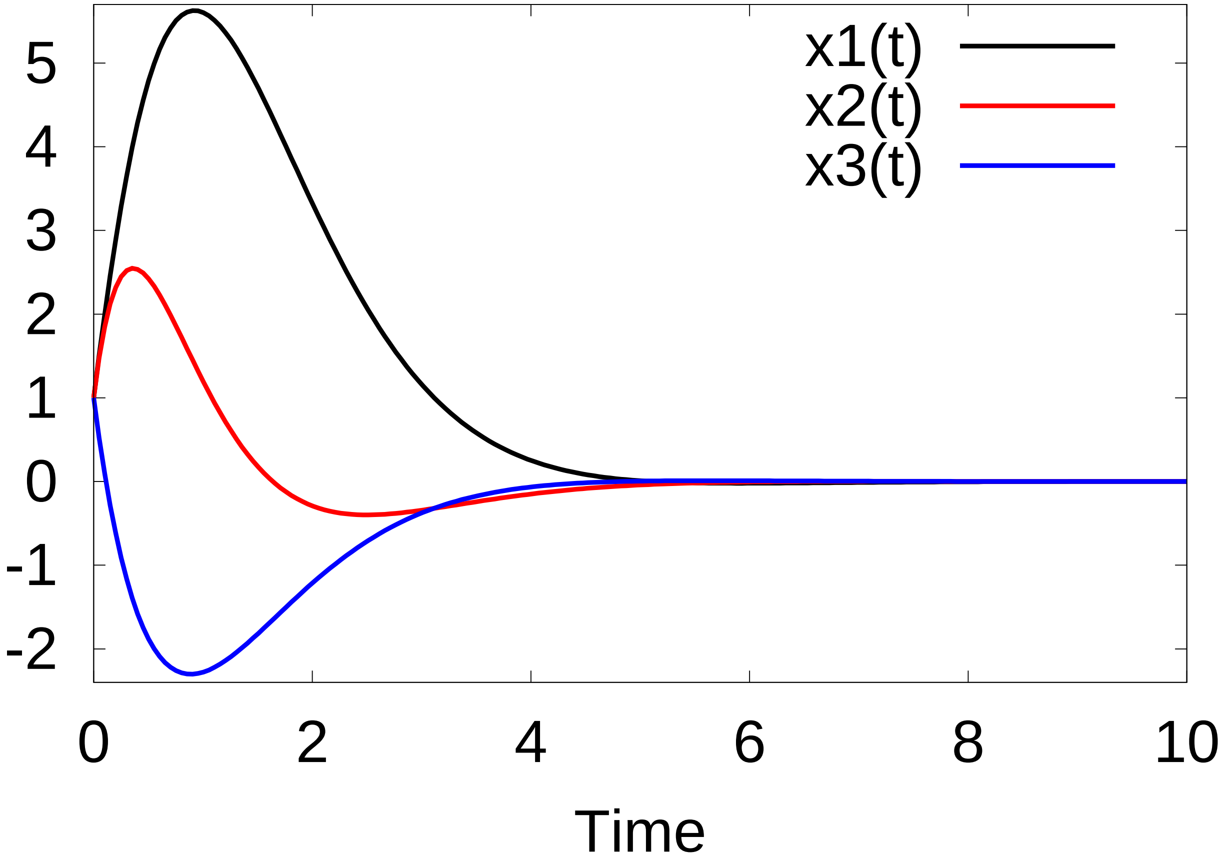
## 応用上の利点

制御器に計時機能が不要.「掛けっぱなし」の制御に適す.

**実習 13**　**Code 13** を実行せよ．乱数で無作為に生成した $A, \boldsymbol{b}$ に対して，無限時間最適レギュレータ $K$ が求まり，状態量の時間応答がプロットされる．Octave/Scilab 等には，最適レギュレータを求める専用の関数があり，ユーザーがリカッチ代数方程式を解く必要はない．

# 解答例

乱数で状態方程式を生成するため，時間応答は実行ごとに変化する．



第 13 回 動的システム入門

# 演習 3 — 最適レギュレータ

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

**http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/**

# 演習の進め方

- **テキストの 13 章「演習 3」を自習せよ.**
- **グループワークを成績評価の前提条件とする.**
  - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと.
  - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ.
  - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ.
  - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ.

**グループワークの重要性**

権威 (授業なら教員) に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される．自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる.

第 14 回 動的システム入門

# レポートの出題

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/

**提出期限：8 月 31 日　　提出方法：掲示する**

## レポート課題

**1.** 動的システム $\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = 0$ について，下記の空欄 $\boxed{\mathrm{A}}$〜$\boxed{\mathrm{J}}$ を埋めよ．

(1) 1 階化してベクトル形式で整理すると，次の状態方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\quad \mathrm{A} \quad} \\ \boxed{\quad \mathrm{B} \quad} \end{bmatrix}$$

(2) この状態方程式は，次の 3 つの平衡点を持つ．

$$(x_1, x_2) = (\boxed{\mathrm{C}}, 0), (0, 0), (\boxed{\mathrm{D}}, 0)$$

(3) これを $(0, 0)$ まわりで線形化すると，次の線形化方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathrm{E}} & \boxed{\mathrm{F}} \\ \boxed{\mathrm{G}} & \boxed{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

(4) その固有値は $s = \boxed{\mathrm{I}}, \boxed{\mathrm{J}}$ であるから，$(0, 0)$ は鞍点である．

**2.** テキストの**実習 18〜20** を，条件を変えながら実行し，次の問題を考察せよ．

(1) 制御入力の重み $R$ を増やすと，時間応答はどのように変化するか？

(2) 制御入力の重み $R$ を減らすと，時間応答はどのように変化するか？

**3.** 本講義に対する感想と要望を率直に述べよ．(批判的内容も加点の対象とする)